29 November 2013 18:14

تهیه و گردآوری توسط STEVE

راهنما و مرجع کامل حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد اول ۲

سری راهنمای دانشجو

مولف: دکتر طاهر لطفی
ویراستار: کتایون مهدیانی

«اتلاف وقت گرانبهاترین خرجهاست.»

بالزاک

فهرست

عنوان	صفحه
فصل ۷ روشهای انتگرالگیری	
۱.۷ فرمولهای اصلی انتگرالگیری	۹
۲.۷ انتگرالگیری جزء به جزء	۱۵
۳.۷ حاصلضربها و توانهای تابعهای مثلثاتی	۲۰
۴.۷ توانهای زوج سینوس و کسینوس‌ها	۲۵
۵.۷ جانشانیهای مثلثاتی که در آن‌ها تک جمله ایهای مربع به جای a^2-u^2 a^2+u^2 و a^2-u^2 قرار می‌گیرند	۲۹
۶.۷ انتگرالهای شامل ax^2+bx+c	۳۶
۷.۷ انتگراگیری از توابع گویا به روش کسرهای ساده	۴۰
۸.۷ انتگرالهای غیرعادی	۴۶
۹.۷ استفاده از جدولهای انتگرالها	۴۹
۱۰.۷ فرمولهای کاهش توان	۵۱
مسأله‌های گوناگون	۵۴
فصل ۸ مقاطع مخروطی و سایر خمهای مسطح	
۱.۸ معادله‌های حاصل از فرمول فاصله	۵۵
۲.۸ دایره	۷۴
۳.۸ سهمی	۷۶
۴.۸ بیضی	۷۸
۵.۸ هذلولی	۸۰
۶.۸ نمودار معادلات درجه دوم	۸۲
۷.۸ سهمی، بیضی یا هذلولی؟ مبین پاسخ می‌دهد	۸۳
۹.۸ معادلات پارامتری مقاطع مخروطی و خمهای دیگر	۸۵
مسأله‌های گوناگون	۸۶
فصل ۹ تابعهای هیپربولیک	
۱.۹ تعریفها و اتحادها	۹۴
۲.۹ مشتقها و انتگرالها	۹۶
۴.۹ تابعهای هیپربولیک معکوس	۱۰۰
مسأله‌های گوناگون	۱۰۴
فصل ۱۰ مختصات قطبی	
۱.۱۰ دستگاه مختصات قطبی	۱۰۷
۲.۱۰ ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی	۱۱۰

۳.۱۰ معادله‌های قطبی مقطعهای مخروطی و خمهای دیگر ۱۱۴
۴.۱۰ انتگرال در مختصات قطبی ۱۲۰
مسأله‌های گوناگون ۱۲۵

فصل ۱۱ دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی

۱.۱۱ دنباله‌های اعداد ۱۳۵
۲.۱۱ قضیه‌های مربوط به حد ۱۳۶
۳.۱۱ حدهایی که با آنها بسیار سر و کار داریم ۱۳۸
۴.۱۱ سریهای نامتناهی ۱۳۹
۵.۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای مقایسه‌ای و انتگرال ۱۴۳
۶.۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای نسبت و ریشه ۱۴۶
۷.۱۱ همگرایی مطلق ۱۴۹
۸.۱۱ سریهای متناوب و همگرایی مشروط ۱۵۱
۹.۱۱ مرور ۱۵۲
مسأله‌های گوناگون ۱۵۳

فصل ۱۲ سریهای توانی

۱.۱۲ مقدمه
۲.۱۲ چند جمله‌ای تیلر ۱۵۷
۳.۱۲ قضیه تیلر با باقیمانده: سینوسها، کسینوسها و e^x ۱۵۹
۴.۱۲ نقطه‌های بسط، قضیهٔ دو جمله‌ای، آرکتانژانتها، و π ۱۶۱
۵.۱۲ همگرایی سریهای توانی: مشتقگیری، انتگرالگیری، ضرب، و تقسیم ۱۶۲
۶.۱۲ صورتهای مبهم ۱۶۵
مسأله‌های گوناگون ۱۶۷

هدف بزرگ زندگی عمل است، نه دانایی.
«هگزلی»

فصل هفتم
روشهای انتگرالگیری

Methods of Integration

۱.۷ فرمولهای اصلی انتگرالگیری
Basic Integration Formulas

انتگرالهای مسائل ۱ـ۱۶ را به کمک جانشانی داده شده به صورت متداول در آورید و سپس آنها را محاسبه کنید.

۱. $\int 6x\sqrt{3x^2+5}\,dx, \quad u=3x^2+5$

حل

$u=3x^2+5 \Rightarrow 6xdx=du \Rightarrow$

$$\int 6x\sqrt{3x^2+5}\,dx=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+C$$

۲. $\int \frac{16x\,dx}{8x^2+2}, \quad u=8x^2+2$

حل

$u=8x^2+2 \Rightarrow 16xdx=du \Rightarrow$

$$\int\frac{16x\,dx}{8x^2+2}=\int\frac{du}{u}=\text{Ln}\,|u|+C=\text{Ln}\,|8x^2+2|+C$$

۳. $\int_0^{\sqrt{\text{Ln}2}} xe^{x^2}dx, \quad u=x^2$

حل

$u=x^2 \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du \Rightarrow$

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{\text{Ln}2}} xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^{\sqrt{\text{Ln}2}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\text{Ln}2}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۴. $\int\frac{\text{Cos}x\,dx}{\sqrt{1+\text{Sin}x}}, \quad u=1+\text{Sin}x$

حل

$u=1+\text{Sin}x \Rightarrow du=\text{Cos}x\,dx$

$$\int\frac{\text{Cos}x\,dx}{\sqrt{1+\text{Sin}x}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C=2\sqrt{1+\text{Sin}x}+C$$

۵. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}, \quad u=8x^2+1$

حل

$u=8x^2+1 \Rightarrow xdx=\frac{1}{16}du \Rightarrow$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}=\frac{1}{16}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{\sqrt{u}}{8}+C$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{8x^2+1}+C$$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{8x^2+1}}=\frac{1}{8}\sqrt{8x^2+1}\Big]_0^1=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

۶. $\int\frac{\text{Sin}x}{3+4\text{Cos}x}dx, \quad u=3+4\text{Cos}x$

حل

$u=3+4\text{Cos}x \Rightarrow du=-4\text{Sin}x\,dx \Rightarrow \text{Sin}x\,dx=-\frac{du}{4}$

$$\Rightarrow\int\frac{\text{Sin}x}{3+4\text{Cos}x}dx=\frac{-1}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{-1}{4}\text{Ln}\,|u|+C$$

$$=-\frac{1}{4}\text{Ln}\,|3+4\text{Cos}x|+C$$

۷. $\int e^x\text{Sec}^2(e^x)dx, \quad u=e^x$

حل

$u=e^x \Rightarrow e^xdx=du \Rightarrow$

$$\int e^x\sec^2(e^x)dx=\int\sec^2u\,du=\tan u+C=\tan e^x+C$$

۸. $\int_1^3\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}, \quad u=\sqrt{y}$

حل

$u=\sqrt{y} \Rightarrow y=u^2 \Rightarrow dy=2u\,du \Rightarrow$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}=\int\frac{2u\,du}{u(1+u^2)}=2\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=2\tan^{-1}u+C=2\tan^{-1}\sqrt{y}+C$$

$$\Rightarrow\int_1^3\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}=2\tan^{-1}\sqrt{y}\Big]_1^3$$

$$=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$$

۹. $\int e^x\sqrt{3+4e^x}\,dx, \quad u=3+4e^x$

حل

$u=3+4e^x \Rightarrow e^xdx=\frac{1}{4}du \Rightarrow$

$$\int e^x\sqrt{3+4e^x}\,dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{u}\,du$$

$$\frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}(3+4e^x)^{\frac{3}{2}}+C$$

۱۰. $\int_4^9\frac{dx}{x-\sqrt{x}}, \quad u=\sqrt{x}$

حل $u=\sqrt{x}\Rightarrow x=u^{2}\Rightarrow dx=2udu\Rightarrow$

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}=\int\frac{2udu}{u^{2}-u}=2\int\frac{du}{u-1}=2Ln\,|u-1|+C$$

$$=2Ln\,|\sqrt{x}-1|+C\Rightarrow\int_{4}^{9}\frac{dx}{x-\sqrt{x}}=2Ln\,|\sqrt{x}-1|\Big]_{4}^{9}$$

$$=2(Ln2-Ln1)=2Ln2$$

۱۱. $\int\frac{dx}{xLnx},\quad u=Lnx$

حل $u=Lnx\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\Rightarrow\int\frac{dx}{xLnx}=\int\frac{du}{u}$

$$=Ln|u|+C=Ln|Lnx|+C$$

۱۲. $\int_{0}^{2}\frac{e^{x}dx}{1+e^{x}},\quad u=1+e^{x}$

حل $u=1+e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx\Rightarrow\int\frac{e^{x}dx}{1+e^{x}}$

$$=\int\frac{du}{u}=Ln\,|u|+C=Ln\,|1+e^{x}|+C$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{2}\frac{e^{x}dx}{1+e^{x}}=Ln\,|1+e^{x}|\Big]_{0}^{2}$$

$$=Ln(1+e^{2})-Ln2=Ln\left(\frac{1+e^{2}}{2}\right)$$

۱۳. $\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}dx,\quad u=\sqrt{x}$

حل $u=\sqrt{x}\Rightarrow u^{2}=x\Rightarrow 2udu=dx\Rightarrow$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2ue^{u}du=2(ue^{u}-e^{u})+C$$

$$=2\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

$$\Rightarrow I=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\Big]_{0}^{1}=2$$

۱۴. $\int\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx,\quad u=\sqrt{x}$

حل $u=\sqrt{x}\Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x}}=2du\Rightarrow$

$$\int\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\tan u\,du=2Ln\,|\sec u|+C$$

$$=2Ln\,|\sec\sqrt{x}|+c$$

۱۵. $\int\tan x\sec^{2}x\,dx,\quad u=\tan x$

حل $\Rightarrow du=\sec^{2}x\,dx\Rightarrow\int\tan x\sec^{2}x\,dx=\int u\,du$

$$=\frac{1}{2}u^{2}+C=\frac{1}{2}\tan^{2}x+C$$

۱۶. $\int\tan x\sec^{2}x\,dx,\quad u=\sec x$

حل $\Rightarrow du=\sec x\tan x\,dx\Rightarrow\int\tan x\sec^{2}x\,dx$

$$=\int u\,du=\frac{1}{2}u^{2}+C=\frac{1}{2}\sec^{2}x+C$$

در مسائل ۱۷-۲۰، انتگرالها را به کمک اتحادها و جانشانیهای داده شده به صورت متداول درآورید و سپس آنها را محاسبه کنید.

۱۷. $\int Cos^{3}x\,dx,\quad Cos^{2}x=1-Sin^{2}x,\quad u=Sinx$

حل $\Rightarrow du=Cosx\,dx\ \&\ \int Cos^{2}x\,dx=\int Cos^{2}x\,Cosx\,dx$

$$=\int(1-Sin^{2}x)Cosx\,dx=\int(1-u^{2})du$$

$$=u-\frac{1}{3}u^{3}+C=Sinx-\frac{Sin^{3}x}{3}+C$$

۱۸. $\int Sin^{4}x\,Cos^{3}x\,dx,\quad Cos^{2}x=1-Sin^{2}x,\quad u=Sinx$

حل $\Rightarrow du=Cosx\,dx\Rightarrow\int Sin^{4}x\,Cos^{3}x\,dx$

$$=\int Sin^{4}x(1-Sin^{2}x)Cosx\,dx=\int u^{4}(1-u^{2})du$$

$$=\frac{1}{5}u^{5}-\frac{1}{7}u^{7}+C=\frac{1}{5}Sin^{5}x-\frac{Sin^{7}x}{7}+C$$

۱۹. $\int\tan^{3}x\sec x\,dx,\quad \tan^{2}x=\sec^{2}x-1\quad u=\sec x$

حل $\Rightarrow du=\sec x\tan x\,dx\Rightarrow\int\tan^{3}x\sec x\,dx$

$$=\int\tan^{2}x\tan x\sec x\,dx=\int(\sec^{2}x-1)\tan x\sec x\,dx$$

$$=\int(u^{2}-1)du=\frac{u^{3}}{3}-u+C=\frac{1}{3}\sec^{3}x-\sec x+C$$

۲۰. $\int\tan^{3}x\sec^{3}x\,dx,\quad \tan^{2}x=\sec^{2}x-1\quad u=\sec x$

حل $\Rightarrow du=\sec x\tan x\,dx\Rightarrow\int\tan^{3}x\sec^{3}x\,dx$

$$=\int(\sec^{2}x-1)\tan x\sec^{2}x\sec x\,dx=\int(u^{2}-1)u^{2}du$$

$$=\frac{u^{5}}{5}-\frac{u^{3}}{3}+C=\frac{\sec^{5}x}{5}-\frac{\sec^{3}x}{3}+C$$

در مسائل ۲۱-۸۰، جانشانیهایی به دست آورید که بتوان به کمک آنها انتگرالها را به صورتهای متداول درآورد. سپس انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

۲۱. $\int^{3}\sqrt{2x+3}\,dx$

حل $u=2x+3\Rightarrow du=2dx\Rightarrow\int\sqrt{2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$$

۲۸. $\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}dx$

حل: $u=2+\tan x \Rightarrow du=\sec^2 x dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\sec^2 x dx}{2+\tan x}=\int \frac{du}{u}=\ln|2+\tan x|+C$$

۲۹. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$

حل: $u=1+\sin x \Rightarrow du=\cos x dx \Rightarrow \int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)^2}$

$$=\int \frac{du}{u^2}=\frac{-1}{u}+C=\frac{-1}{1+\sin x}+C$$

۳۰. $\int_{0}^{\pi/4} 8\cos^3 2x \sin 2x dx$

حل: $u=\cos 2x \Rightarrow du=-2\sin 2x dx \Rightarrow$

$$\int 8\cos^3 2x \sin 2x dx=\frac{-1}{2}\int 8u^3 du=-u^4+C=-\cos^4 2x+C$$

$$\Rightarrow I=-\cos^4 2x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=0-(-1)=1$$

۳۱. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2x \sin^3 2x dx$

(راهنمایی: $\cos^3 2x=\cos 2x(1-\sin^2 2x)$.)

حل: $u=\sin 2x \Rightarrow du=2\cos 2x dx \Rightarrow \int \sin^2 2x \cos^3 2x dx$

$$=\int \sin^2 2x(1-\sin^2 2x)\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int (u^2-u^4)du$$

$$=\frac{1}{6}u^3-\frac{1}{10}u^5+C=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$$

نتیجه فوق از فرد بودن تابع هم واضح است چون بازه متقارن است.

۳۲. $\int \csc^4 x dx$ (راهنمایی $\csc^4 x=\csc^2 x(1+\cot^2 x)$)

حل: $=\int \csc^4 x dx=\int \csc^2 x(1+\cot^2 x)dx$

$$=\int \csc^2 x dx+\int \csc^2 x \cot^2 x+C$$

$$=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$$

۳۳. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

حل: $u=1-4x^2 \Rightarrow du=-8x dx \Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\left(2x+3\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\left(2x+3\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{19}{3}$$

۲۲. $\int_{1}^{40} \frac{dx}{3x+5}$

حل: $u=3x+5 \Rightarrow du=3dx \Rightarrow \int \frac{dx}{3x+5}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$

$$=\frac{1}{3}\ln|u|+C=\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\ln|3x+5|\Big]_{1}^{40}=\frac{1}{3}\{\ln 125-\ln 8\}$$

$$=\frac{1}{3}\{3\ln 5-3\ln 2\}=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$$

۲۳. $\int \frac{dx}{(2x-7)^2}$

حل: $u=2x-7 \Rightarrow du=2dx \Rightarrow \int \frac{dx}{(2x-7)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}$

$$=\frac{-1}{2u}+C=\frac{-1}{2(2x-7)}+C$$

۲۴. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3}$

حل: $u=x^2++3 \Rightarrow du=2(x+1)dx \Rightarrow$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|+C$$

۲۵. $\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin x dx}{2+\cos x}$

حل: $u=2+\cos x \Rightarrow \sin x dx=-du \Rightarrow \int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$

$$=-\int \frac{du}{u}=-\ln|u|=-\ln|2+\cos x|+C$$

$$\Rightarrow I=-\ln|2+\cos x|\Big]_{-\pi}^{0}=-\ln 3+\ln 1=-\ln 3$$

۲۶. $\int \tan^3 2x \sec^2 2x dx$

حل: if $u=\tan 2x$ then we have $du=2\sec^2 2x dx$

$$\Rightarrow \int \tan^3 2x \sec^2 2x dx=\frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$=\frac{u^4}{8}+C=\frac{1}{8}\tan^4 2x+C$$

۲۷. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$

حل: $u=\sin x \Rightarrow du=\cos x dx \Rightarrow \int \sqrt{\sin x}\cos x dx=\int \sqrt{u}\,du$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{-\sqrt{u}}{4} + C = \frac{-\sqrt{1-4x^2}}{4} + C$$

۳۴. $\int x^{1/3}\sqrt{x^{4/3}-1}\,dx$

حل

$$u = x^{\frac{4}{3}} - 1 \Rightarrow du = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx \Rightarrow \frac{3}{4}du = x^{\frac{1}{3}}dx$$

$$\Rightarrow \int x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{4}{3}}-1}\,dx = \frac{3}{4}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}(x^{\frac{4}{3}}-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

۳۵. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

حل

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Sin}^{-1}x\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

۳۶. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}2x\,dx$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sin}2x\,dx = \frac{-1}{2}\operatorname{Cos}2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2}[-1-1] = 1$$

۳۷. $\int_0^1 \frac{3x}{1+x^2}dx$

حل

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{3}{2}\operatorname{Ln}|1+x^2|\Big]_0^1 = \frac{3}{2}\operatorname{Ln}2$$

۳۸. $\int_0^{\pi} x\operatorname{Sin}(x^2)dx$

حل

$$\int_0^{\pi} x\operatorname{Sin}x^2dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Cos}x^2\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[1-\operatorname{Cos}\pi^2]$$

۳۹. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{Sin}^2 2x}{1+\operatorname{Cos}2x}dx$ (راهنمایی: $\operatorname{Sin}^2 2x = 1-\operatorname{Cos}^2 2x$)

حل

$$\int \frac{\operatorname{Sin}^2 2x}{1+\operatorname{Cos}2x}dx = \int \frac{1-\operatorname{Cos}^2 2x}{1+\operatorname{Cos}2x}dx = \int (1-\operatorname{Cos}2x)dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}2x + C \Rightarrow$$

$$I = x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi-2}{4}$$

۴۰. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$

حل

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \sec^{-1}|y|\Big]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

۴۱. $\int_0^{1/2} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

حل

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \operatorname{Sin}^{-1}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

۴۲. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2vdv}{\sqrt{1-v^4}}$

حل

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2vdv}{\sqrt{1-v^4}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d(v)^2}{\sqrt{1-(v^2)^2}} = \operatorname{Sin}^{-1}v^2\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{6}$$

۴۳. $\int \frac{xdx}{(3x^2+4)^3}$

حل

$$u = 3x^2+4 \Rightarrow du = 6xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{6}du \Rightarrow$$

$$\int \frac{xdx}{(3x^2+4)^3} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^3} = \frac{-1}{12u^2} + c = \frac{-1}{12(3x^2+4)^2} + c$$

۴۴. $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

حل

$$u = x^3+5 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$$

$$\Rightarrow \int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(x^3+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

۴۵. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+5}}$

حل با توجه به تمرین قبل داریم:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+5}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\sqrt{u} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+5} + c$$

۴۶. $\int \frac{xdx}{4x^2+1}$

حل

$$u = 4x^2+1 \Rightarrow du = 8xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{8}du \Rightarrow$$

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{8}\operatorname{Ln}|u| + c$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{Ln}|4x^2+1| + c$$

۴۷. $\int_0^{\operatorname{Ln}2} e^{2x}dx$

حل

$$\int_0^{\operatorname{Ln}2} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{Ln}2} 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^{\operatorname{Ln}2}$$

$$= \frac{1}{2}[e^{2\operatorname{Ln}2} - e^0] = \frac{1}{2}[4-1] = \frac{3}{2}$$

۴۸. $\int e^{\operatorname{Cos}x}\operatorname{Sin}x\,dx$

حل

$$\int e^{\operatorname{Cos}x}\operatorname{Sin}x\,dx = -\int e^{\operatorname{Cos}x}d(\operatorname{Cos}x) = -e^{\operatorname{Cos}x} + c$$

۴۹. $\int \frac{dx}{e^{2x}}$

$$\int \frac{dx}{e^{3x}} = -\frac{1}{3}\int -3e^{-3x}dx = \frac{-1}{3}e^{-3x}+c$$ حل

۵۰. $$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$$

حل $$u=\sqrt{1+x} \Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2du \Rightarrow$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int e^u du = 2e^u+c = 2e^{\sqrt{x+1}}+c$$

۵۱. $$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$$

حل $$u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \Rightarrow \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$=\tan^{-1}u+c=\tan^{-1}e^x+c$$

۵۲. $$\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dt}{1+9t^2}$$

حل $$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+9t^2} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3dt}{1+(3t)^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}(3t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}-\tan^{-1}0\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{9}$$

۵۳. $$\int \cos^2 x \sin x dx$$

حل $$u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx \Rightarrow \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$=-\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3+c = \frac{-1}{3}\cos^3 x+c$$

۵۴. $$\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$$

حل $$u=\sin x \Rightarrow du=\cos x dx \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$=\int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2}+c = \frac{-1}{2\sin^2 x}+c$$

۵۵. $$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^3 x \csc^2 x dx$$

حل $$u=\cot x \Rightarrow du=-\csc^2 x dx \Rightarrow \int \cot^3 x \csc^2 x dx$$

$$=\int -u^3 du = -\frac{u^4}{4}+c = \frac{-\cot^4 x}{4}+c$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\cot^4 x}{4}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(0+\left(\sqrt{3}\right)^4\right) = \frac{9}{4}$$

۵۶. $$\int_0^{\pi/3} \tan 3x \sec^2 3x dx$$

حل $$u=\tan 3x \Rightarrow du=3\sec^2 3x dx \Rightarrow$$

$$\int \tan 3x \sec^2 3x dx = \frac{1}{3}\int u du = \frac{u^2}{6}+c$$

$$=\frac{\tan^2 3x}{6}+c \Rightarrow I=\frac{1}{6}\tan^2 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 0$$

۵۷. $$\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx$$

حل $$u=e^{2x}-e^{-2x} \Rightarrow du=2(e^{2x}+e^{-2x})dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|u|+c$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|e^{2x}-e^{-2x}|+c$$

۵۸. $$\int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x dx$$

حل $$u=\cos 2x \Rightarrow du=-2\sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = \frac{-1}{2}du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-u^2 du}{2} = \frac{-u^3}{6}+c = \frac{-1}{6}\cos^3 2x+c$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{6}\cos^3 2x\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{6}[1-1] = 0$$

۵۹. $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta$$

حل $$u=1+\cos\theta \Rightarrow du=-\sin\theta d\theta \Rightarrow \sin\theta d\theta=-du$$

$$\Rightarrow \int (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = -\int u^3 du = \frac{-u^4}{4}+c$$

$$=-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}+c \Rightarrow I=-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

۶۰. $$\int te^{-t^2}dt$$

حل $$u=-t^2 \Rightarrow du=-2tdt \Rightarrow tdt=\frac{-1}{2}du \Rightarrow$$

$$\int te^{-t^2}dt = \frac{-1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u+c = -\frac{1}{2}e^{-t^2}+c$$

۶۱. $$\int \frac{dt}{t\sqrt{4t^2-1}}$$

حل $$u=2t \Rightarrow du=2dt \Rightarrow dt=\frac{1}{2}du \Rightarrow$$

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{4t^2-1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u|+c = \sec^{-1}|2t|+c$$

۶۲. $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

(راهنمایی: صورت و مخرج را در e^x ضرب کنید).

حل By help we can write $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}}$

now suppose $u=e^x$ we have $du=e^x dx$ such that

$$\int \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}u + c = \sec^{-1}e^x + c$$

۶۳. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x}$

حل $u=\sin x \Rightarrow du=\cos x dx \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{du}{u}$

$= \ln|u| + c = \ln|\sin x| + c$

۶۴. $\int^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x}$

حل $u=1+\sin x \Rightarrow du=\cos x dx \Rightarrow \int \frac{\cos x dx}{1+\sin x} = \int \frac{du}{u}$

$= \ln|u| + c = \ln|1+\sin x| + c$

$\Rightarrow I = \ln|1+\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

۶۵. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$

حل $u=\sec x \Rightarrow du=\sec x\tan x dx \Rightarrow$

$\int \sec^3 x\tan x dx = \int \sec^2 x.\sec x\tan x dx = \int u^2 du$

$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}\sec^3 x + c$

۶۶. $\int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}$

حل $u=1+\cos\theta \Rightarrow du=-\sin\theta d\theta \Rightarrow \sin\theta d\theta = -du \Rightarrow$

$\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}d\theta = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} + c = -2\sqrt{1+\cos\theta} + c$

۶۷. $\int e^{\tan 3x}\sec^2 3x\, dx$

حل $u=\tan 3x \Rightarrow du=3\sec^2 3x dx \Rightarrow \sec^2 3x dx = \frac{1}{3}du \Rightarrow$

$\int e^{\tan 3x}\sec^2 3x dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{e^u}{3} + c = \frac{e^{\tan 3x}}{3} + c$

۶۸. $\int \cos 2t\sqrt{4-\sin 2t}\, dt$

حل $u=4-\sin 2t \Rightarrow du=-2\cos 2t dt \Rightarrow \cos 2t dt = \frac{-1}{2}du$

$= \int \cos 2t\sqrt{4-\sin 2t}dt = \frac{-1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{-1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{-1}{3}\left(4-\sin 2t\right)^{\frac{3}{2}} + c$

۶۹. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$

حل $\begin{cases} 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \\ \sin^2 2x = (\sin 2x)^2 = (2\sin x\cos x)^2 = 4\sin^2 x\cos^2 x\sin^2 2x \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}dx = \int \frac{2\cos^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx$

$= \frac{-1}{2}\int \csc^2 x\, dx = \frac{-1}{2}\cot x + c$

$\Rightarrow I = \frac{-1}{2}\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{2}\left[1-\sqrt{3}\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

۷۰. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x}dx$

حل $\begin{cases} \sin^2 2x = (\sin 2x)^2 = (2\sin x\cos x)^2 = 4\sin^2 x\cos^2 x \\ 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = 2\int \sin^2 x dx$

$= 2\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = x - \frac{1}{2}\sin 2x + c$

$\Rightarrow I = x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

۷۱. $\int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1+\cot 2t}}dt$

حل $u=1+\cot 2t \Rightarrow du=-2\csc^2 2t dt$

$\Rightarrow \int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1+\cot 2t}}dt = \frac{-1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{1+\cot 2t} + c$

۷۲. $\int_0^{\ln 3} e^{3x}dx$

حل $\int_0^{\ln 3} e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\ln 3} 3e^{3x}dx =$

$\frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_0^{\ln 3} = \frac{1}{3}\left[27-1\right] = \frac{26}{3}$

۷۳. $\int_0^{1/2} \frac{e^{\tan^{-1}2t}}{1+4t^2}dt$

حل $u=\tan^{-1}2t \Rightarrow du = \frac{2dt}{1+4t^2} \Rightarrow \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{2}du$

$\Rightarrow \int \frac{e^{\tan^{-1}2t}}{1+4t^2}dt = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2t} + c$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2t}\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right]$

۸۱. انتگرال $\int xe^{(x^2)}dx$ را به کمک جانشانی (الف) $u=x^2$ و (ب) $u=e^{(x^2)}$ محاسبه کنید.

حل

a) $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du$

$$\Rightarrow \int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{e^u}{2}+c=\frac{e^{x^2}}{2}+c$$

b) $u=e^{x^2} \Rightarrow du=2xe^{x^2}dx \Rightarrow xe^{x^2}dx=\frac{du}{2}$

$$\Rightarrow \int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int du=\frac{u}{2}+c=\frac{e^{x^2}}{2}+c$$

۲.۷ انتگرالگیری جزء به جزء Integration by parts

انتگرالهای مسائل ۱ـ۳۸ را محاسبه کنید

۱. $\int xSinx\,dx$

حل

$u=x \Rightarrow du=dx;\ Sinxdx=dv \Rightarrow v=-Cosx \Rightarrow$

$$\int xSinx\,dx=-xCosx+\int Cosx\,dx=-xCosx+Sinx+c$$

۲. $\int xCos2x\,dx$

حل

$u=x \Rightarrow du=dx;\ Cos2xdx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{2}Sin2x \Rightarrow$

$$\int xSin2x\,dx=\frac{x}{2}Sin2x-\frac{1}{2}\int Sin2x\,dx$$
$$=\frac{x}{2}Sin2x+\frac{1}{4}Cos2x+c$$

۳. $\int x^2Sinx\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
$f(x)=x^2$	+	$g(x)=Sinx$
$2x$	−	$-Cosx$
2	+	$-Sinx$
0		$Cosx$

$$\Rightarrow I=-x^2Cosx+2xSinx+2Cosx+c$$

۴. $\int x^2Cosx\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
$f(x)=x^2$	+	$g(x)=Cosx$
$2x$	−	$Sinx$
2	+	$-Cosx$
		$-Sinx$

$$\Rightarrow I=x^2Sinx+2xCosx-2Sinx+c$$

۵. $\int_1^2 xLnx\,dx$

حل

$u=Lnx \Rightarrow du=\frac{dx}{x};\ xdx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{2}x^2$

۷۴. $\int xe^{-x^2}dx$

حل

$$\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx=\frac{-1}{2}e^{-x^2}+c$$

۷۵. $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

حل

$u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx=\int 2^u du=\frac{2^u}{Ln2}+c=\frac{2^{\sqrt{x}}}{Ln2}+c$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{Ln2}\left[2^{\sqrt{x}}\right]_1^4=\frac{1}{Ln2}\left[2^2-2\right]=\frac{2}{Ln2}$$

۷۶. $\int 10^{2x}dx$

حل

$u=2x \Rightarrow du=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$

$$\Rightarrow \int 10^{2x}dx=\frac{1}{2}\int 10^u du=\frac{10^u}{2Ln10}+c=\frac{10^{2x}}{2Ln10}+c$$

۷۷. $\int \frac{Lnx}{x}dx$

حل

$u=Lnx \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \Rightarrow$

$$\int \frac{Lnx}{x}dx=\int udu=\frac{1}{2}u^2+c=\frac{1}{2}(Lnx)^2+c$$

۷۸. $\int \frac{Cos(Lnx)}{x}dx$

حل

$u=Lnx \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{Cos(Lnx)}{x}dx$

$$=\int Cosudu=Sinu+c=Sin(Lnx)+c$$

۷۹. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

حل

$u=1+\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\int \frac{du}{u}=2Ln|u|+c=2Ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

$$\Rightarrow I=2Ln\left|1+\sqrt{x}\right|\Big]_1^9=2(Ln4-Ln2)=2Ln2$$

۸۰. $\int_0^{\sqrt{e-1}} Ln(x^2+1).2x(x^2+1)^{-1}dx$

حل

$u=Ln(x^2+1) \Rightarrow du=\frac{2xdx}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{2xLn(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int udu=\frac{1}{2}u^2+c=\frac{1}{2}\left[Ln\left|1+x^2\right|\right]^2+c$$

$$I=\frac{1}{2}\left[Ln\left|1+x^2\right|\right]^2\Big]_0^{\sqrt{e-1}}=\frac{1}{2}(Lne)^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int x\,Lnx\,dx = \frac{x^2}{2}Lnx - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}Lnx - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2 Lnx}{2} - \frac{x^2}{4}\Big]_1^2 = 2Ln2 - \frac{3}{4}$$

۶. $\int x^2 Lnx\,dx$

حل

$$u = Lnx \Rightarrow du = \frac{dx}{x};\ x^2dx = dv \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \Rightarrow$$

$$\int x^2 Lnx\,dx = \frac{x^3}{2}Lnx - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{2}x^3 Lnx - \frac{1}{9}x^3 + c$$

۷. $\int x^3 Lnx\,dx$

حل

$$u = Lnx \Rightarrow du = \frac{dx}{x};\ x^3dx = dv \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \Rightarrow$$

$$\int x^3 Lnx\,dx = \frac{1}{4}x^4 Lnx - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}Lnx - \frac{1}{16}x^4 + c$$

۸. $\int Ln(x+1)dx$

حل

$$u = Ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1};\ dx = dv \Rightarrow v = x \Rightarrow$$

$$\int Ln(x+1)dx = xLn(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= xLn(x+1) - \int dx + \int \frac{dx}{x+1} = (x+1)Ln(x+1) - x + c$$

$$\Rightarrow I = (x+1)Ln(x+1) - x\Big]_0^1 = 2Ln2 - 1$$

۹. $\int \tan^{-1}x\,dx$

حل

$$u = \tan^{-1}x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2};\ dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + c$$

۱۰. $\int \tan^{-1}ax\,dx$

حل

$$u = \tan^{-1}ax \Rightarrow du = \frac{a\,dx}{1+a^2x^2};\ dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\int \tan^{-1}ax\,dx = x\tan^{-1}ax - \int \frac{ax\,dx}{1+a^2x^2}$$

$$= x\tan^{-1}ax - \frac{1}{2a}Ln(1+a^2x^2) + c$$

۱۱. $\int Sin^{-1}x\,dx$

حل

$$u = Sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int Sin^{-1}x\,dx = xSin^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= xSin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$$

۱۲. $\int Sin^{-1}ax\,dx$

حل

$$u = Sin^{-1}ax \Rightarrow du = \frac{a\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}};\ dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int Sin^{-1}ax\,dx = xSin^{-1}ax - \int \frac{ax\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$= xSin^{-1}ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + c$$

۱۳. $\int x\sec^2 x\,dx$

حل

$$u = x \Rightarrow du = dx;\ \sec^2 x\,dx = dv \Rightarrow v = \tan x$$

$$\Rightarrow \int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$

$$= x\tan x + Ln|Cos x| + c$$

۱۴. $\int 4x\sec^2 2x\,dx$

حل

$$u = 4x \Rightarrow du = 4dx;\ \sec^2 2x\,dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}\tan 2x$$

$$\Rightarrow \int 4x\sec^2 2x\,dx = 4x.\frac{1}{2}\tan 2x - 2\int \tan 2x\,dx$$

$$= 2x.\tan 2x + Ln|Cos 2x| + c$$

۱۵. $\int x^3 e^x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^3	+	e^x
$3x^2$	−	e^x
$6x$	+	e^x
6	−	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow I = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

۱۶. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^4	+	e^{-x}
$4x^3$	−	$-e^{-x}$
$12x^2$	+	e^{-x}
$24x$	−	$-e^{-x}$
24	+	e^{-x}
0		$-e^{-x}$

$$\Rightarrow I = -e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24) + c$$

۱۷. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2-5x	+	e^x
$2x-5$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow I = e^x(x^2 - 5x - 2x + 5 + 2) + c = e^x(x^2 - 7x + 7) + c$$

۱۸. $\int (x^2 + x + 1)e^x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2+x+1	+	e^x
$2x+1$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow I=e^x(x^2+x+1-2x-1+2)+c=e^x(x^2-x+2)+c$$

۱۹. $\int x^5e^x\,dx$

حل

$$\Rightarrow I=e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)+c$$

۲۰. $\int x^2e^{4x}\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2	+	e^{4x}
$2x$	−	$\frac{1}{4}e^{4x}$
2	+	$\frac{1}{16}e^{4x}$
0		$\frac{1}{64}e^{4x}$

$$\Rightarrow I=\frac{e^{4x}}{4}\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)=c$$

۲۱. $\int_0^{\pi/2} x^2\sin 2x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2	+	$\sin 2x$
$2x$	−	$\frac{-1}{2}\cos 2x$
2	+	$\frac{-1}{4}\sin 2x$
0		$\frac{1}{8}\cos 2x$

$$\Rightarrow I=\frac{-x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$$

۲۲. $\int_0^{\pi/2} x^3\cos 2x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^3	+	$\cos 2x$
$3x^2$	−	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$6x$	+	$\frac{-1}{4}\cos 2x$
6	−	$\frac{-1}{8}\sin 2x$
0		$\frac{1}{16}\cos 2x$

$$\Rightarrow I=\frac{x^3}{2}\sin 2x+\frac{3x^2}{4}\cos 2x-\frac{3x}{4}\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{4}\right)$$

۲۳. $\int x^4\cos x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^4	+	$\cos x$
$4x^3$	−	$\sin x$
$12x^2$	+	$-\cos x$
$24x$	−	$-\sin x$
24	+	$\cos x$
0		$\sin x$

$$\Rightarrow I=x^4\sin x+4x^3\cos x-12x^2\sin x-24x\cos x+24\sin x+c$$

۲۴. $\int x^5\sin x\,dx$

حل

$$I=-x^5\cos x+5x^4\sin x+20x^3\cos x-60x^2\sin x$$
$$-120x\cos x+120\sin x+c$$

۲۵. $\int x^2\cos ax\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2	+	$\cos ax$
$2x$	−	$\frac{1}{a}\sin ax$
2	+	$\frac{-1}{a^2}\cos ax$
0		$\frac{-1}{a^3}\sin ax$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{a}\sin ax+\frac{2x}{a^2}\cos ax-\frac{2}{a^3}\sin ax+c$$

۲۶. $\int x\cos(2x+1)\,dx$

حل

$$u=x\Rightarrow du=dx;\ \cos(2x+1)dx=dv\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin(2x+1)$$
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}x\sin(2x+1)-\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin x(2x+1)+\frac{1}{4}\cos(2x+1)+c$$

۲۷. $\int_1^2 x\sec^{-1}x\,dx$

حل

$$u=\sec^{-1}x\Rightarrow du=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};\ x\,dx=dv\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$
$$\Rightarrow\int_1^2 x\sec^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\sec^{-1}x\Big]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\sec^{-1}x-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\right]_1^2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۸. $\int_{1}^{4} \sec^{-1}\sqrt{x}\, dx$

حل

$$u=\sec^{-1}\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}\,;\; dv=dx \Rightarrow v=x$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{4} \sec^{-1}\sqrt{x}\, dx = x\sec^{-1}\sqrt{x}\Big]_{1}^{4} - \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \left[x\sec^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right]_{1}^{4} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

۲۹. $\int_{1}^{e} \frac{Lnx}{x}\, dx$

حل

$$u=Lnx \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{Lnx}{x}\, dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}Ln^2x + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}Ln^2x\Big]_{1}^{e} = \frac{1}{2}\left(Ln^2e - Ln^2 1\right) = \frac{1}{2}$$

۳۰. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\, dx$

حل

$$u=x \Rightarrow du=dx;\; \sqrt{1-x}\,dx=dv \Rightarrow v \Rightarrow v=\frac{-2}{3}\left(1-x\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\, dx = \frac{-2x}{3}\left(1-x\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1} + \frac{2}{3}\int_{0}^{1}\left(1-x\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x\left(1-x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\left(1-x\right)^{\frac{5}{2}}\right]_{0}^{1} = \frac{4}{15}$$

۳۱. $\int x\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

حل

$$\begin{cases} u=\sin^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow du=\dfrac{-dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ dv=x\,dx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c$$

۳۲. $\int x\sin^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) dx$

حل

$$\begin{cases} u=\sin^{-1}\frac{a}{x} \Rightarrow du=\dfrac{\frac{-a\,dx}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} = \dfrac{-a\,dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \\ dv=x\,dx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{a}{2}\sqrt{x^2-a^2} + c$$

۳۳. $\int e^x \sin x\, dx$

حل

$$u=e^x \Rightarrow du=e^x dx;\; \sin x\,dx=dv \Rightarrow v=-\cos x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x + \underbrace{\int e^x\cos x\, dx}_{(*)}$$

$$(*) \Rightarrow u=e^x \Rightarrow du=e^x dx;\; \cos x\,dx=dv \Rightarrow v=\sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x\cos x\, dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\, dx \quad (I)$$

$$\overset{(I)}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} \int e^x\sin x\, dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\, dx$$

$$\Rightarrow \int e^x\sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + c$$

۳۴. $\int e^{-x}\cos x\, dx$

حل

$$u=e^{-x} \Rightarrow du=-e^{-x}dx;\; \cos x\,dx=dv \Rightarrow v=\sin x$$

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}\sin x + \underbrace{\int e^{-x}\sin x\, dx}_{(*)}\;;$$

$$(*) \Rightarrow u=e^{-x} \Rightarrow du=-e^{-x}dx;\; \sin x\,dx=dv \Rightarrow v=-\cos x$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\sin x\, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx \quad (I)$$

$$\overset{(I)}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} \int e^{-x}\cos x\, dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\cos x\, dx = \frac{e^{-x}}{2}\left(\sin x - \cos x\right) + c$$

۳۵. $\int e^{2x}\cos 3x\, dx$

حل

$$\begin{cases} u=e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ \cos 3x\, dx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\, dx = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{2x}\sin 3x\, dx}_{(*)}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} u=e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ \sin 3x\, dx=dv \Rightarrow v=\frac{-1}{3}\cos 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x = \frac{-e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\, dx; \quad (I)$$

$$\Rightarrow \int x(\text{Ln}x)^2 dx = \frac{x^2}{2}.(\text{ln}x)^2 - \underbrace{\int x\text{Ln}x\,dx}$$

$$(*) \Rightarrow u=\text{Ln}x \Rightarrow du=\frac{dx}{x};\ xdx=dv \Rightarrow \frac{x^2}{2}=v^{(*)}$$

$$\Rightarrow \int x\text{Ln}x\,dx = \frac{x^2}{2}\text{Ln}x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\text{Ln}x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\Rightarrow \int x(\text{Ln}x)^2 dx = \frac{x^2}{2}\left[(\text{Ln}x)^2 - \text{Ln}x\right] + \frac{x^2}{4} + c$$

۳۹. مطلوب است مساحت ناحیهٔ محدود به محور x و خم $y=x\text{Sin}x$ به ازای (الف) $0 \le x \le \pi$، (ب) $\pi \le x \le 2\pi$

حل

$$a)\ S=\int_a^b f(x)dx = \int_0^\pi x\text{Sin}x\,dx = [-x\text{Cos}x + \text{Sin}x]_0^\pi = \pi$$

$$b)\ S=\int_\pi^{2\pi} -x\text{Sin}x\,dx = [x\text{Cos}x - \text{Sin}x]_\pi^{2\pi} = 3\pi$$

۴۰. ناحیه محدود به $x=0$، $y=0$، و $y=\text{Cos}x$، $0 \le x \le \pi/2$ حول محور y دوران می‌کند. حجم حاصل را به کمک پوسته‌های استوانه‌ای بیابید.

حل

$$v=2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\text{Cos}x\,dx = \pi^2 - 2\pi$$

۴۱. ناحیه واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات، خم $y=e^{-x}$، و خط $x=1$ حول محور y دوران می‌کند. حجم حاصل را بیابید.

حل

$$v=2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{2\pi(e-2)}{e}$$

۴۲. مطلوب است مرکز جرم یک ورقهٔ نازک همگن که به خم $y=\text{Sin}x$، $0 \le x \le \pi$ و محور x محدود است.

حل

$$M=\int_a^b f(x)dx = \int_0^\pi \text{Sin}x\,dx = 2;$$

$$M_x = \int_0^\pi \frac{1}{2}\text{Sin}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\text{Cos}2x)dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

بنابر تقارن $\bar{x}=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

۴۳. مطلوب است مرکز جرم یک ورقه نازک همگن که به خم $y=x^2e^x$، محور x، و خط $x=1$ محدود است.

حل

$$M=\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 x^2e^x dx = e-2$$

$$M_y = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^1 x^3e^x dx = 2(3-e)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2(3-e)}{e-2}$$

$$\overset{(I)}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} \int e^{2x}\text{Cos}3x\,dx = \frac{e^{2x}}{3}\text{Sin}3x + \frac{2e^{2x}}{9}\text{Cos}3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\text{Cos}3x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}\int e^{2x}\text{Cos}3x\,dx = \frac{e^{2x}}{3}\left[\text{Sin}3x + \frac{2}{3}\text{Cos}3x\right]$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\text{Cos}3x\,dx = \frac{3e^{2x}}{13}\left[\text{Sin}3x + \frac{2}{3}\text{Cos}3x\right] + c$$

۳۶. $\int e^{-2x}\text{Sin}2x\,dx$

حل

$$\Rightarrow \begin{cases} u=e^{-2x} \Rightarrow du=-2e^{-2x}dx \\ \text{Sin}2x\,dx = dv \Rightarrow v=-\frac{1}{2}\text{Cos}2x \end{cases}$$

$$\int e^{-2x}\text{Sin}2x\,dx = \frac{-e^{-2x}}{2}\text{Cos}2x - \underbrace{\int e^{-2x}\text{Cos}2x\,dx}_{(*)}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} u=e^{-2x} \Rightarrow du=-2e^{-2x}dx \\ \text{Cos}2x\,dx = dv \Rightarrow \frac{1}{2}\text{Sin}2x = v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int e^{-2x}\text{Cos}2x = \frac{e^{-2x}}{2}\text{Sin}2x + \int e^{-2x}\text{Sin}2x;\quad (I)$$

$$\overset{(I)}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} 2\int e^{-2x}\text{Sin}2x\,dx = \frac{-e^{-2x}}{2}\text{Cos}2x - \frac{e^{-2x}}{2}\text{Sin}2x$$

$$\Rightarrow \int e^{-2x}\text{Sin}2x = \frac{-e^{-2x}}{4}(\text{Cos}2x + \text{Sin}2x) + c$$

۳۷. $\int \text{Sin}(\text{Ln}x)dx$

حل

$$u=\text{Sin}(\text{Ln}x) \Rightarrow du=\frac{1}{x}.\text{Cos}(\text{Ln}x)dx;\ dx=dv \Rightarrow x=v$$

$$\Rightarrow \int \text{Sin}(\text{Ln}x)dx = x\text{Sin}(\text{Ln}x) - \underbrace{\int \text{Cos}(\text{Ln}x)dx}$$

$$(*) \Rightarrow u=\text{Cos}(\text{Ln}x) \Rightarrow du=\frac{-1}{x}.\text{Sin}(\text{Ln}x)dx;\ dv \overset{(*)}{=} dx \Rightarrow v=x$$

$$\Rightarrow \int \text{Cos}(\text{Ln}x)dx = x.\text{Cos}(\text{Ln}x) + \int \text{Sin}(\text{Ln}x)dx;\ (I)$$

$$\overset{(I)}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} 2\int \text{Sin}(\text{Ln}x)dx = x\text{Sin}(\text{Ln}x) - x.\text{Cos}(\text{Ln}x)$$

$$\Rightarrow \int \text{Sin}(\text{Ln}x)dx = \frac{x}{2}\left[\text{Sin}(\text{Ln}x) - \text{Cos}(\text{Ln}x)\right] + c$$

۳۸. $\int x(\text{Ln}x)^2 dx$

حل

$$u=(\text{Ln}x)^2 \Rightarrow du=\frac{2\text{Ln}x}{x}dx;\ dv=xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$M_x=\int_a^b \frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4 e^{2x}\,dx=\frac{e^2-3}{8}$$

$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{e^2-3}{8(e-2)}$$

۴۴. مطلوب است مرکز جرم یک ورقهٔ نازک همگن به خم $y=Lnx$ و خطوط $x=1$ و $y=1$ محدود است.

حل

$$M=\int_a^b (f(x)-g(x))dx=\int_1^e (1-Lnx)dx=e-2$$

$$M_y=\int_a^b x(f(x)-g(x))dx=\int_1^e x(1-Lnx)dx=\frac{e^2-3}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{e^2-3}{4(e-2)}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_1^e \left[1-(Lnx)^2\right] dx=\frac{1}{2}\Rightarrow \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{2(e-2)}$$

۴۵. مطلوب است حجم ناشی از دوران ناحیه واقع در ربع اول و محدود به محور x و خم $y=xSinx$، $0\le x\le \pi$ حول (الف) محور x (ب) حول خط $x=\pi$.

حل

$$a)\ v=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx=\pi\int_0^\pi x^2 Sin^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_0^\pi x^2\left(\frac{1-Cos2x}{2}\right) dx=\frac{\pi^4}{6}-\frac{\pi^2}{4}$$

$$b)\ v=2\pi\int_a^b (\pi-x)f(x)dx=2\pi\int_0^\pi (\pi-x)xSinx\,dx=8\pi$$

۴۶. مطلوب است مرکز جرم یک ورقهٔ نازک همگن که به خم $y=Lnx$، محور x و خط $x=2$ محدود است.

حل

$$M=\int_a^b f(x)dx=\int_1^2 Lnx\,dx=2Ln2-1$$

$$M_y=\int_a^b xf(x)dx=\int_1^2 xLnx\,dx=2Ln2-\frac{3}{4}$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{2Ln2-\frac{3}{4}}{2Ln2-1}$$

$$M_x=\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2 dx=\frac{1}{2}\int_1^2 (Lnx)^2 dx=(Ln2)^2-2Ln2+1$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{(Ln2)^2-2Ln2+1}{2Ln2-1}$$

۴۷. یک ورقه نازک با چگالی $\delta=(1+x)$ به محور x و خم $y=Sinx$، $0\le x\le\pi$ محدود است. مطلوب است گشتاور این ورقه حول محول y.

حل

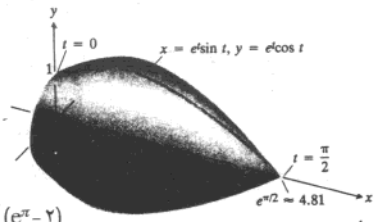
$$M_y=\int x.\delta f(x)dx=\int_0^\pi x(1+x)Sinx\,dx=\pi^2+\pi-4$$

۴۸. مطلوب است حجم جسم ایجاد شده از دوران ناحیهٔ محدود به محور x و خم $y=x\sqrt{1-x}$، $0\le x\le 1$، حول محور y.

حل

$$v=2\pi\int_a^b xf(x)dx=2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$$

۴۹. مطلوب است مساحت رویهٔ ایجاد شده در اثر دوران خم $x=e^tSint,\ y=e^tCost,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ حول محور x (شکل ۳.۷).



حل

$$\frac{2\pi\sqrt{2}\,(e^\pi-2)}{5}$$

۵۰. انتگرال $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ را از راه انتگرالگیری جزء به جزء محاسبه کنید.

(راهنمایی: نخست از $u^2=x$ استفاده کنید.)

حل

$$u^2=x\Rightarrow 2udu=dx\Rightarrow \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 ue^u du$$

$$=2e^u(u-1)\Big]_0^1=2$$

۵۱. گر چه معمولاً در انتگرالگیری جزء به جزء برای تعیین v به صورت $\int dv$ از ثابت انتگرالگیری صرفنظر می‌کنیم، اما گاه انتخاب ثابتی که برابر صفر نباشد سودمند است. مثلاً، انتگرال $\int x\tan^{-1}x\,dx$ را با $u=\tan^{-1}x$ و $v=(x^2/2)+1/2$ محاسبه کنید.

حل

$$\begin{cases} u=\tan^{-1}x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x\,dx\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$=\int x\tan^{-1}x\,dx=\frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}x-\int\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2}+c$$

۳.۷. حاصلضربها و توانهای تابعهای مثلثاتی (غیر از توانهای زوج سینوسها و کسینوسها)

Products and powers of trigonometric functions

در مسائل ۱-۲۲ انتگرالها را محاسبه کنید. در محاسبهٔ انتگرالهای معین می‌توانید از مثلثهای شکل ۹.۷ استفاده کنید.

۱. $\int \sin^5 x\,dx$

حل: $\int \sin^5 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$

$= \int (1-u^2)^2(-du) = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 - u + c$

$= \frac{-1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

۲. $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$

حل: $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\,dx = \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2}\,dx$

$= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}\,dx$

$= -2\cos \frac{x}{2} + \frac{4}{3}\cos^3 \frac{x}{2} - \frac{2}{5}\cos^5 \frac{x}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{16}{15}$

۳. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

حل: $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$

۴. $\int \cos^5 3x\,dx$

حل: $\int \cos^5 3x\,dx = \int (\cos^2 3x)^2 \cos 3x\,dx$

$= \int (1-\sin^2 3x)^2 \cos 3x\,dx$

$= \int (1 - 2\sin^2 3x + \sin^4 3x) \cos 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + \frac{1}{15}\sin^5 3x + c$

۵. $\int \sin^7 x\,dx$

حل: $\int \sin^7 x\,dx = \int (\sin^2 x)^3 \sin x\,dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^3 \sin x\,dx$

$= \int (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x\,dx$

$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$

۶. $\int \cos^7 x\,dx$

حل: $\int \cos^7 x\,dx = \int (\cos^2 x)^3 \cos x\,dx$

$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c$

۷. $\int \cos^{2/3} x \sin^5 x\,dx$ (راهنمایی: یک عامل $\sin x$ و dx را جدا کنید و بقیه را بر حسب کسینوس بیان کنید.)

حل: $\int \cos^{\frac{2}{3}} x . \sin^5 x\,dx = \int \cos^{\frac{2}{3}} x . (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$

$= \int \left[\cos^{\frac{2}{3}} x - 2\cos^{\frac{8}{3}} x + \cos^{\frac{14}{3}} x\right] \sin x\,dx$

$= \frac{-3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x + \frac{6}{11}\cos^{\frac{11}{3}} x - \frac{3}{17}\cos^{\frac{17}{3}} x + c$

۸. $\int \sin^{3/2} x \cos^3 x\,dx$ (راهنمایی: یک عامل $\cos x$ و dx را جداکنید و بقیه را بر حسب سینوس بیان کنید.)

حل: $\int \sin^{\frac{3}{2}} x \cos^3 x\,dx = \int \sin^{\frac{3}{2}} x . (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$= \int \left[\sin^{\frac{3}{2}} x - \sin^{\frac{7}{2}} x\right] \cos x\,dx$

$= \frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x - \frac{2}{9}\cos^{\frac{9}{2}} x + c$

۹. $\int_0^{\pi/3} \sec x\,dx$

حل: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2+\sqrt{3})$

۱۰. $\int \sec^4 t\,dt$

حل: $\int \sec^4 t\,dt = \frac{1}{4}\ln|\sec^4 t + \tan^4 t| + c$

۱۱. $\int_{-\pi/3}^{0} \sec^3 x\,dx$

حل: $\int_{\frac{-\pi}{3}}^{0} \sec^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sec x . \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|\right]_{\frac{-\pi}{3}}^{0}$

$= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3})$

۱۲. $\int_0^{\pi/6} \frac{2\sin^2 x}{\cos x}\,dx$

حل: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec x - \cos x)\,dx = 2\ln|\sec x + \tan x|$

$- 2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln 3 - 1$

۱۳. $\int e^x \sec^3 e^x \, dx$

حل $\int e^x \sec^3 e^x \, dx = \frac{1}{2}\sec e^x . \tan e^x + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|\sec e^x + \tan e^x| + c$

۱۴. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x \, dx$

حل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\sec^2 x \, dx$

$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

۱۵. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\mathrm{Sin}^4 x}$

حل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\mathrm{Sin}^4 x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cot^2 x)\csc^2 x \, dx$

$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

۱۶. $\int \sec^4 3x \, dx$

حل $\int \sec^4 3x \, dx = \int (1+\tan^2 3x)\sec^2 3x \, dx$

$= \frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\tan^3 3x + c$

۱۷. $\int_0^{\pi/4} \sec^8 x \, dx$

حل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^8 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x)^3 \sec^2 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)^3 \sec^2 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+3\tan^2 x + 3\tan^4 x + \tan^6 x)\sec^2 x \, dx$

$= \tan x + \tan^3 x + \frac{3}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{96}{35}$

۱۸. $\int \frac{2x\,dx}{\mathrm{Cos}^2(x^2)}$

حل $\int \frac{2x\,dx}{\mathrm{Cos}^2(x^2)} = \int \sec^2(x^2)\,2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\sec x^2 . \tan x^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|\sec x^2 + \tan x^2| + c$

۱۹. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx$

حل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)\tan x \, dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x - \mathrm{Ln}(\mathrm{Cos}x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \mathrm{Ln}\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۰. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \, dx$

حل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x \Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi - 8}{6}$

۲۱. $\int \tan^6 x \, dx$

حل $\int \tan^6 x = \int \tan^4 x(\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \int \sec^2 x . \tan^4 x \, dx - \int \tan^4 x \, dx$

$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + c$

۲۲. الف) $\int \cot^2 x \, dx$ ب) $\int \cot^4 x \, dx$

حل a) $\int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + c$

b) $\int \cot^4 x \, dx = \int \cot^2 x(\csc^2 x - 1)\,dx$

$= \frac{-1}{3}\cot^3 x + x + \cot x + c$

۲۳. نشان دهید $\int \csc x \, dx = -\mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x| + c$

(راهنمایی: راه کوتاه به دست آوردن انتگرال سکانت را در مورد کسکانت تکرار کنید.)

حل $\int \csc x \, dx = \int \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} . \csc x \, dx$

$= \int \frac{\csc^2 x + \csc x . \cot x}{\csc x + \cot x} dx = -\mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x| + c$

۲۴. به کمک نتیجهٔ مسأله ۲۳ نشان دهید.

$\int \csc^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\csc x \cot x - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x| + c$

حل $\begin{cases} u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cot x \, dx \\ \csc^2 x \, dx = dv \Rightarrow v = -\cot x \end{cases} \Rightarrow$

$$\int \csc^3 x\,dx = -\csc x.\cot x - \int \csc x.\cot^2 x\,dx$$
$$= -\csc x.\cot x - \int \csc x(\csc^2 x - 1)dx$$
$$= -\csc x.\cot x - \int \csc^3 x\,dx + \int \csc x\,dx$$
$$\Rightarrow 2\int \csc^3 x\,dx = -\csc x.\cot x - \mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x| + c$$

۲۵. مطلوب است محاسبه الف) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ ب) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

حل

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx$$
$$= \mathrm{Ln}\,|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

b) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x\,dx$$
$$= -\mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{Ln}\sqrt{3}$$

۲۶. مطلوب است محاسبهٔ $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x}$.

(راهنمایی: صورت و مخرج را در $1-\sin x$ ضرب کنید.)

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x - \sec x\tan x)dx = \tan x - \sec x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

در مسائل ۲۷-۳۲، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

۲۷. $\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\,dx$

حل

$$\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} (\sin x + \sin 5x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x\Big]_{-\pi}^{0} = \frac{-6}{5}$$

۲۸. $\int_0^{\pi/2} \cos 3x\sin 2x\,dx$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 5x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{5}$$

۲۹. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x\,dx$

حل

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

۳۰. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \frac{-1}{4}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

۳۱. $\int_0^{\pi} \cos 3x\cos 4x\,dx$

حل

$$\int_0^{\pi} \cos 3x\cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos x + \cos 7x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x\Big]_0^{\pi} = 0$$

۳۲. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\cos 7x\,dx$

حل

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 6x + \cos 8x)dx$$
$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 8x\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

۳۳. به کمک نتیجهٔ مسأله ۲۳ و اتحاد $2\sin A\cos A = \sin 2A$ انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{\sec 2x\csc 2x}{2}dx$$

حل

$$\int \frac{\sec 2x\csc 2x}{2}dx = \int \frac{dx}{2\cos 2x\sin 2x}$$
$$= \int \frac{dx}{\sin 4x} = \int \csc 4x\,dx = -\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\,|\csc 4x + \cot 4x| + c$$

۳۴. کدام یک از انتگرالهای زیر برابر صفر است و کدام یک برابر صفر نیست؟ (در مورد اکثر این انتگرالها بدون نوشتن چیزی می‌توان پاسخ داد.)

الف) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin}x\,\text{Cos}^{۲}x\,dx$ ب) $\int_{-۱}^{۱} \text{Sin}۳x\,\text{Cos}\,۵x\,dx$

پ) $\int_{-L}^{L} \sqrt[۳]{\text{Sin}x}\,dx$ ت) $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx$

ث) $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} x\,\text{sec}x\,dx$ ج) $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \tan^{۳}x\,dx$

چ) $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} x\,\text{Sin}x\,dx$ ح) $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} x\,\text{Cos}x\,dx$

خ) $\int_{-a}^{a} \text{Sin}mx\,\text{Cos}mx\,dx,\ m\neq ۰$

د) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Sin}^{۵}x\,dx$ ذ) $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \text{Cos}^{۳}x\,dx$

ر) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}^{۵}x\,dx$ ز) $\int_{-\text{Ln}۲}^{\text{Ln}۲} x(e^{x}+e^{-x})\,dx$

ژ) $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \text{Sin}^{۲}x\,\text{Cos}x\,dx$ س) $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \text{Sin}x\,\text{Sin}۲x\,dx$

ش) $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \text{sec}x\tan x\,dx$

ص) $\int_{-a}^{a} (e^{x}\text{Sin}x+e^{-x}\text{Sin}x)\,dx$

ض) $\int_{-۱}^{۱} \frac{\text{Sin}x\,dx}{e^{x}+e^{-x}}$

حل با توجه به متقارن بودن بازه، توابعی که فرد باشد، انتگرال آن صفر است که تابع، انتگرالهای (الف)، (ب)، (پ)، (ت)، (ث)، (ج)، (ح)، (خ)، (د)، (ز)، (ص)، (ض) دارای چنینی خاصیتی می‌باشند.

نمونه ـ سؤال کارشناسی رشته ریاضی و کامپیوتر سال ۱۳۷۹

حاصل انتگرال $\int_{\frac{-۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} (\cos x)\text{Ln}\frac{۱+x}{۱-x}\,dx$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

جواب صحیح گزینه (۲) است، چرا که انتگرالده تابعی فرد و بازه متقارن است.

۳۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که از بالا به خم $y=۲\text{Cos}x$ و از پایین به خم $y=\text{sec}x$، $-\pi/۴\leq x\leq \pi/۴$ محدود است.

حل

$$S=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} (۲\text{Cos}x-\text{sec}x)\,dx$$

$$=۴\text{Sin}x-۲\text{Ln}\mid \text{sec}x+\tan x\mid \Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=۲\sqrt{۲}-۲\text{Ln}\left(\sqrt{۲}+۱\right)$$

۳۶. طول خم زیر را بیابید. $y=\text{Ln}(\text{Cos}x).\ ۰\leq x\leq \frac{\pi}{۳}$

حل

$$y'=\frac{-\text{Sin}x}{\text{Cos}x}=-\tan x\Rightarrow (y')^{۲}=\tan^{۲}x$$

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{۱+\left(f'(x)\right)^{۲}}\,dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\sqrt{۱+\tan^{۲}x}\,dx$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} \text{sec}x\,dx=\text{Ln}\mid \text{sec}x+\tan x\mid \Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=\text{Ln}(۲+\sqrt{۳})$$

۳۷. طول خم زیر را بیابید. $y=\text{Ln}(\text{sec}x).\ ۰\leq x\leq \frac{\pi}{۴}$

حل

$$f'(x)=\frac{\text{sec}x.\tan x}{\text{sec}x}=\tan x$$

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{۱+\left(f'(x)\right)^{۲}}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\sqrt{۱+\tan^{۲}x}\,dx$$

$$=\text{Ln}\mid \text{sec}x+\tan x\mid \Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=\text{Ln}\left(\sqrt{۲}+۱\right)$$

۳۸. مرکز جرم ناحیهٔ محدود به محور x، خم $y=\text{sec}x$ و خطوط $x=-\pi/۴$، $x=\pi/۴$ را بیابید.

حل

$$M=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \text{sec}x\,dx=\text{Ln}\mid \text{sec}x+\tan x\mid \Big]_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}=\text{Ln}\left|۳+۲\sqrt{۲}\right|$$

$$M_{x}=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{۲}\text{sec}^{۲}x\,dx=\frac{۱}{۲}\tan x\Big]_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}=۱$$

$\bar{x}=۰$ چون $M_{y}=۰$ و در مبدأ قرار دارد پس

$$\bar{y}=\frac{M_{x}}{M}=\frac{۱}{\text{Ln}(۳+۲\sqrt{۲})}$$

۳۹. نشان دهید که هرگاه m، n، p، و q اعدادی صحیح باشند و $m^{۲}\neq n^{۲}$، داریم:

الف) $\int_{۰}^{۲\pi} \text{Sin}mx\,\text{Sin}nx\,dx=۰$

ب) $\int_{۰}^{۲\pi} \text{Sin}px\,\text{Cos}qx\,dx=۰$

حل a) $\int_{۰}^{۲\pi} \text{Sin}mx\,\text{Sin}nx\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(\text{Cos}(m-n)x-\text{Cos}(m+n)x)\,dx$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\operatorname{Sin}(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\operatorname{Sin}(m+n)x\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{if } m^2 \neq n^2 \Rightarrow m \neq \pm n,\ m,n \in Z \Rightarrow m \pm n \in Z$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin} 2\pi(m \pm n) = 0$$

$$\text{b)} \int_0^{2\pi} \operatorname{Sin}px \operatorname{Cos}qx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\operatorname{Sin}(p+q)+\operatorname{Sin}(p-q)x\Big]\,dx$$

$$= \frac{-\operatorname{Cos}(p+q)x}{2(p+q)} - \frac{\operatorname{Cos}(p-q)x}{2(p-q)}\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\begin{cases} \text{if } p^2 \neq q^2 \Rightarrow p \neq \pm q,\ p,q \in Z \Rightarrow p \pm q \in Z \\ \Rightarrow \operatorname{Cos} 2\pi(p+q) = \operatorname{Cos} 2\pi(p-q) = 1 \end{cases}$$

$$\text{if } p = \pm q \Rightarrow I = \frac{\pm 1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Sin} 2px\,dx = \frac{\pm 1}{4}\operatorname{Cos} 2px\Big]_0^{2\pi} = 0$$

۴۰. دو تابع f و g را در بازه $a \le x \le b$ متعامد گویند هرگاه

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

الف) ثابت کنید که، هرگاه m و n اعدادی صحیح باشند و $m^2 \neq n^2$، Sinmx و Sinnx در هر بازه‌ای به طول 2π متعامدند.

ب) ثابت کنید Cosmx و Cosnx نیز در همان شرایط متعامدند.

پ) ثابت کنید که Sinmx و Cosnx نیز در همان شرایط و یا حتی اگر $m=n$، متعامدند.

(در مثال ۶ و مسأله ۴۰ این احکام برای بازه $[0,2\pi]$ ثابت می‌شود.)

حل

$$\text{a)} \int_p^{p+2\pi} \operatorname{Sin}mx \operatorname{Sin}nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_p^{p+2\pi}\Big[\operatorname{Cos}(m-n)-\operatorname{Cos}(m+n)x\Big]\,dx$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{Sin}(m+n)x}{2(m+n)}\Big]_p^{p+2\pi} = 0 \quad \text{if } m^2 \neq n^2$$

۴.۷ توانهای زوج سینوس‌ها و کسینوس‌ها

Even Power of sines and cosines

مطلوب است محاسبه انتگرالهای مسائل ۱-۲۶.

۱. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sin}^2 x\,dx$

حل

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Sin}^2 x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}2x\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

۲. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Cos}^2 t\,dt$

حل

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Cos}^2 t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\operatorname{Cos}2t}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{Sin}2t\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

۳. $\int \operatorname{Sin}^2 2t\,dt$

حل

$$\int \operatorname{Sin}^2 2t\,dt = \int\left(\frac{1-\operatorname{Cos}4t}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{4}\operatorname{Sin}4t\right) + c$$

۴. $\int \operatorname{Cos}^2 3\theta\,d\theta$

حل

$$\int \operatorname{Cos}^2 3\theta\,d\theta = \int\left(\frac{1+\operatorname{Cos}6\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{6}\operatorname{Sin}6\theta\right) + c$$

۵. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^2 x\,dx$

حل

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^2 x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{Sin}x \operatorname{Cos}x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Sin}^2 2x\,dx = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{Cos}4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{Sin}4x\right)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}$$

۶. $\int_0^{\pi} \operatorname{Sin}^4 x\,dx$

حل

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Sin}^4 x\,dx = \int_0^{\pi} (\operatorname{Sin}^2 x)^2\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1 - 2\operatorname{Cos}2x + \operatorname{Cos}^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(1 - 2\operatorname{Cos}2x + \frac{1+\operatorname{Cos}4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{Sin}2x + \frac{1}{8}\operatorname{Sin}4x\right]_0^{\pi} = \frac{3}{8}\pi$$

۷. $\int_0^{\pi/a} \operatorname{Sin}^4 ax\,dx$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} \operatorname{Sin}^4 ax\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} (\operatorname{Sin}^2 ax)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{a}} (1-\operatorname{Cos}2ax)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{a}} (1 - 2\operatorname{Cos}2ax + \operatorname{Cos}^2 2ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{a}}\left(1 - 2\operatorname{Cos}2ax + \frac{1+\operatorname{Cos}4ax}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{a}\sin 2ax + \frac{1}{8a}\sin 4ax\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{3\pi}{8a}$$

۸. $\int_0^1 \cos^4 2\pi t\,dt$

حل

$$\int_0^1 \cos^4 2\pi t\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1+\cos 4\pi t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + 2\cos 4\pi t + \cos^2 4\pi t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 + 2\cos 4\pi t + \frac{1+\cos 8\pi t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}t + \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi t + \frac{1}{16\pi}\sin 8\pi t\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

۹. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$

حل

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int (\tan^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int \left(\sec^2 x - 1 - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\right)dx$$

$$= \tan x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

۱۰. $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}\,dx$

حل

$$\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^3}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int (\csc^2 x - 3 + 3\sin^2 x - \sin^4 x)\,dx$$

$$= \int \left(\csc^2 x - 3 + 3\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\right)dx$$

$$= -\cot x - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

$$= -\cot x - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= -\cot x - \frac{15}{8}x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 4x$$

۱۱. $\int_0^{\pi} \sin^3 y \cos^2 y\,dx$

حل

$$\int_0^{\pi} \sin^3 y \cos^2 y\,dy = \int_0^{\pi} \sin^3 y(1-\sin^2 y)\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin^3 y - \sin^5 y)\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{1-\cos 2y}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\cos 2y}{2}\right)^3\right]dy = \frac{\pi}{16}$$

۱۲. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4\sin^4 t\cos^4 t\,dt$ (راهنمایی: $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$)

حل

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^4 t\cos^4 t\,dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin t\cos t)^4\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2t\,dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{16}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t)\,dt$$

$$= \frac{1}{16}\left[t - \frac{1}{2}\sin 4t\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{32}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 8t)\,dt$$

$$= \frac{3}{32}t - \frac{1}{32}\sin 4t + \frac{1}{256}\sin 8t\Big]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{64}$$

۱۳. $\int \frac{\sin^6\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

حل

$$\int \frac{\sin^2\theta.\sin^4\theta}{\cos^2\theta} = \int \tan^2\theta(1-\cos^2\theta)^2\,d\theta$$

$$= \int \tan^2\theta(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= \int (\tan^2\theta - 2\sin^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int \left(\sec^2\theta - 1 - (1-\cos 2\theta) + \frac{1}{4}(\sin 2\theta)^2\right)d\theta$$

$$= \tan\theta - 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{8}\int (1-\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= \tan\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{32}\sin 4\theta - \frac{15\theta}{8} + c$$

۱۴. $\int_{-\pi}^{0} \sin^6 x\,dx$

حل $\int_{-\pi}^{0} \sin^6 x\,dx = \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{5\pi}{16}$

۱۵. $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt$

حل $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt = \int_{0}^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt$

$= \int_{0}^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt = -2\cos \frac{t}{2}\Big]_{0}^{2\pi} = 4$

$t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \frac{t}{2} \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \frac{t}{2} \geq 0 \Rightarrow \left|\sin \frac{t}{2}\right| = \sin \frac{t}{2}$

۱۶. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dt$

حل $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int_{0}^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,dx$

$= \sqrt{2} \int_{0}^{\pi} |\sin x|\,dx = \sqrt{2} \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$

$= -\sqrt{2}\cos x\Big]_{0}^{\pi} = 2\sqrt{2}$

۱۷. $\int_{0}^{\pi/10} \sqrt{1+\cos 5\theta}\,d\theta$

حل $\int_{0}^{\frac{\pi}{10}} \sqrt{1+\cos 5\theta}\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{10}} \sqrt{2\cos^2 \frac{5\theta}{2}}\,d\theta$

$= \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{10}} \left|\cos \frac{5\theta}{2}\right| d\theta = \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{10}} \cos \frac{5\theta}{2}\,d\theta$

$= \frac{2\sqrt{2}}{5} \sin \frac{5\theta}{2}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{5}$

۱۸. $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos(y/4)}\,dy$

حل $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos(\frac{y}{4})}\,dy = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2\cos^2 \frac{y}{8}}\,dt$

$= \sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \left|\cos \frac{y}{8}\right| dy = 8\sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} \cos \frac{y}{8}\,dy$

$= \sqrt{2} \sin \frac{y}{8}\Big]_{0}^{2\pi} = 8$

۱۹. $\int_{0}^{\pi/2} \theta\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$

(راهنمایی: از رابطه $\sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2}\sin(\theta/2)$ استفاده کنید.)

حل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \theta\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \theta\sqrt{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}\,d\theta$

$= \sqrt{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \frac{\theta}{2}\,d\theta$

$= \sqrt{2}\left[-2\theta\cos \frac{\theta}{2} + 4\sin \frac{\theta}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4 - \pi$

۲۰. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$

حل $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t}\,dt = \int_{0}^{\pi} |\cos t|\,dt$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,dt = \sin t\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$

۲۱. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$

حل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx = 2\ln|\sec x + \tan x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

۲۲. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1}\,dx$

حل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x - 1}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan x|\,dx$

$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = 2\ln|\sec x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \ln 2$

۲۳. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,d\theta$

حل $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta}\,d\theta$

$= \int_{0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big]_{0}^{\pi} = 2$

۲۴. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 2x}\,dx$

حل $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 2x}\,dx = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin^2 2x}\,dx$

$= \int_{0}^{\pi} |\sin 2x|\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\{-(-1-1)+\frac{1}{2}(1+1)\}=\frac{4}{2}=2$$

۲۵. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{\cot^2\theta+1}\,d\theta$

حل
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\cot^2\theta+1}\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\csc^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\csc\theta d\theta=-\ln|\csc\theta+\cot\theta|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=2\ln(1+\sqrt{2})$$

۲۶. $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos^2 t)^{3/2}\,dt$

حل
$$\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos^2)^{\frac{3}{2}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 t\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt=\Big[-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{8}{3}$$

انتگرالهای مسائل ۲۷ ـ ۳۴ را محاسبه کنید. به نظر می‌رسد که برای محاسبهٔ این انتگرالها باید توآنهارا کاهش داد یا ریشه‌های دوم را حذف کرد. اما اگر از راههای دیگری بهره بگیریم، سریعتر به نتیجه می‌رسیم.

۲۷. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos^2 x}\,\sin x\,dx$

حل انتگرالده تابعی فرد و بازه متقارن است پس مقدار انتگرال ۰ است.

۲۸. $\int\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$

حل
$$\int\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int\sec^2 t\,dt=\tan t+c$$

۲۹. $\int\frac{1}{\sin^4 x}\,dx$

حل
$$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\csc^4 x\,dx=\int(\cot^2 x+1)\csc^2 x\,dx$$

$$=\frac{-1}{3}\cot^3 x-\cot x+c$$

۳۰. $\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

حل
$$\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\sin\theta d\theta$$

$$=\int\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\sin\theta\right)d\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta+c$$

۳۱. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

حل
$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\tan x-x\Big]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\pi}{2}$$

۳۲. $\int\frac{\cos 2t}{\sin^4 2t}\,dt$

حل
$$u=\sin 2t\Rightarrow du=2\cos 2t\,dt\Rightarrow\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^4}=-\frac{1}{6u^3}+c=\frac{-1}{6\sin^3 2t}+c$$

۳۳. $\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt$

حل
$$\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt$$

$$=\int(\sec t-\cos t)dt=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+c$$

۳۴. $\int\sin 2x\left(1-\cos 2x\right)^{3/2}dx$

حل راهنمایی: $u=\cos 2x$

۳۵. مطلوب است مساحت بین محور x و خم $y=\sqrt{1+\cos 4x}$، $0\le x\le\pi$

حل
$$A=\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 4x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 2x}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos 2x|\,dx=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$$

۳۶. مطلوب است حجم حاصل از دوران قوس $y=\sin x$، $0\le x\le\pi$، حول محور x

حل
$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$$

۳۷. ناحیهٔ محدود به خم $y=x\sin x$، و بازه $0\le x\le\pi$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی ایجاد می‌شود (شکل ۱۱.۷) حجم جسم را بیابید.

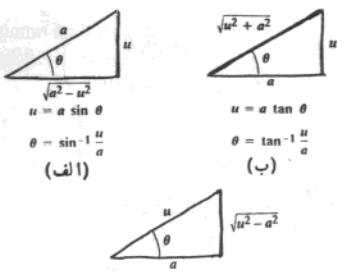
$$=8\pi\int_{0}^{2\pi}\left(1-\cos^{2}\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=8\pi\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^{3}\frac{t}{2}\right]_{0}^{2\pi}=\frac{64\pi}{3}$$

۵.۷. جانشانیهای مثلثاتی که در آنها تک جمله‌ایهای مربع به جای a^2-u^2، a^2+u^2 و u^2-a^2 قرار می‌گیرند.

Trigonometric substitutions that replace a^2-u^2, a^2+u^2, and u^2-a^2 by Single squared Terms.

$u=a\sin\theta$	replace a^2-u^2	by	$a^2\cos^2\theta$
$u=a\tan\theta$	replace a^2+u^2	by	$a^2\sec^2\theta$
$u=a\sec\theta$	replace u^2-a^2	by	$a^2\tan^2\theta$



(الف) (ب)

(پ)

مثلثهای مرجع

در مسائل ۱ـ۱۵، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$

حل

$$\begin{cases}x=2\tan\theta\\ dx=2\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\ \Rightarrow\ \theta=\dfrac{-\pi}{4}\\ x=2\ \Rightarrow\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

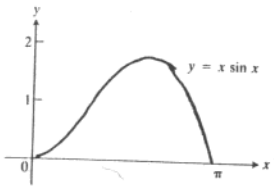
$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4(1+\tan^2\theta)}=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{2\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

۲. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{dx}{8+2x^2}$

حل

$$\begin{cases}x=2\tan\theta\Rightarrow dx=2\sec^2\theta\,d\theta\\ x=2\Rightarrow\ \theta=\dfrac{\pi}{4},\ x=0\ \Rightarrow\theta=0\end{cases}\Rightarrow$$



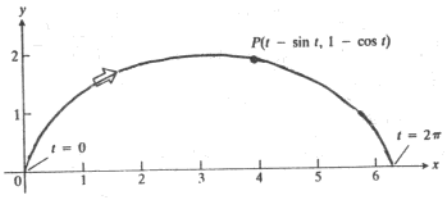
حل

$$V=\pi\int_{a}^{b}\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{0}^{\pi}x^2\sin^2x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}x^2(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}(x^2-x^2\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi^4}{6}-\frac{\pi^2}{4}$$

۳۸. نمودار $x=t-\sin t$، $y=1-\cos t$، $0\le t\le 2\pi$ طاقی است روی محور x (شکل ۱۲.۷) مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران این طاق حول محور x



حل

$x'=1-\cos t,\quad y'=\sin t$

$$S=2\pi\int_{a}^{b}y(t)ds=2\pi\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2t}\,dt$$

$$=2\pi\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_{0}^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^{\frac{3}{2}}dt=2\sqrt{2}\pi\int_{0}^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\left(2\sqrt{2}\pi\right)\left(2\sqrt{2}\right)\int_{0}^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2\theta d\theta}{8(1+\tan^2\theta)} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{16}$$

۳. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

حل

$$x=\frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow dx=\frac{1}{2\sec^2\theta d\theta}$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\theta+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}2x+c$$

۴. $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

حل

$$\begin{cases} x=3\sin\theta \Rightarrow dx=3\cos\theta d\theta \\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},\ x=0 \Rightarrow \theta=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\cos\theta d\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

۵. $\int_0^{\pi/8} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

$$=\sin^{-1}(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{8}} = \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2}{3}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

۷. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+y^2}}$

حل

$$y=5\tan\theta \Rightarrow dy=5\sec^2\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25+y^2}} = \int \frac{5\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{25(1+\tan^2\theta)}} = \int \sec\theta d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{25+y^2}}{5}+\frac{y}{5}\right|+c=\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt{25+y^2}+y\right|+c$$

۸. $\int \frac{3dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

حل

$$3y=\tan\theta \Rightarrow 3dy=\sec^2\theta d\theta$$

$$\int \frac{3dy}{\sqrt{1+9y^2}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}} = \int \sec\theta d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c=\ln\left|\sqrt{1+9y^2}+3y\right|+c$$

۹. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}}$

حل

$$3y=5\tan\theta \Rightarrow dy=\frac{5}{3}\sec^2\theta d\theta$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}} = \int \frac{\frac{5}{3}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{25(1+\tan^2\theta)}} = \frac{1}{3}\int \sec\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c=\frac{1}{15}\ln\left|\sqrt{25+9y^2}+3y\right|+c$$

۱۰. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-4}}$

حل

$$z=2\sec\theta \Rightarrow dz=2\sec\theta\tan\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-4}} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{4(\sec^2\theta-1)}} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{4\tan^2\theta}} d\theta$$

$$=\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta} d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c=\frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{z^2-4}\right|+c$$

۱۱. $\int \frac{3dz}{\sqrt{9z^2-1}}$

حل

$$2z=\sec\theta \Rightarrow 2dz=\sec\theta\tan\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\int \frac{3dz}{\sqrt{9z^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta} d\theta$$

$$=\int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$=\ln\left|3z+\sqrt{9z^2-1}\right|+c$$

۱۲. $\int \frac{dz}{\sqrt{25z^2-9}}$

حل

$$5z=3\sec\theta \Rightarrow dz=\frac{3}{5}\sec\theta\tan\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{25z^2-9}} = \int \frac{\frac{3}{5}\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{9(\sec^2\theta-1)}} = \frac{1}{5}\int \sec\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{1}{\sec u}du=\frac{1}{16}\int \cos u\,du=\frac{1}{16}\sin u+c$$

$$=\frac{\sqrt{y^2-16}}{16y}+c$$

۱۷. $\int_2^4 \sqrt{x^2-4}\,dx,\quad x=2\sec u$

حل:

$$\begin{cases} x=2\sec u \Rightarrow dx=2\sec u\tan u\,du \\ x=4\Rightarrow u=\frac{\pi}{3},\ x=2\Rightarrow u=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sqrt{4(\sec^2 u-1)}\sec u\tan u\,du$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 u\sec u\,du=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 u-1)\sec u\,du$$

$$=2\left[\sec u\tan u-\ln|\sec u+\tan u|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}-2\ln(2+\sqrt{3})$$

۱۸. $\int_0^{4/5}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad x=\cos u$

حل:

$$\begin{cases} x=\cos u \Rightarrow dx=-\sin u\,du \\ x=\frac{4}{5} \Rightarrow u=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right),\ x=0 \Rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)}\frac{-\cos^3 u.\sin u\,du}{\sqrt{1-\cos^2 u}}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)}(1-\sin^2 u)\cos u\,du$$

$$=-\sin u+\frac{1}{3}\sin^3 u\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\cos^{-1}\frac{4}{5}}=\left[\frac{-3}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]-\left[-1+\frac{1}{3}\right]=\frac{52}{375}$$

۱۹. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}},\quad x=3\sin u$

حل:

$x=3\sin u \Rightarrow dx=3\cos u\,du \Rightarrow$

$$I=\int\frac{3\cos u}{9\sin^2 u\sqrt{9(1-\sin^2 u)}}du=\frac{1}{9}\int\frac{du}{\sin^2 u}$$

$$=\frac{1}{9}\int\csc^2 u\,du=\frac{-1}{9}\cot u+c=\frac{-1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right)+c$$

۲۰. $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\quad x=\tan u$

حل:

$$\begin{cases} x=\tan u\Rightarrow dx=\sec u\tan u\,du \\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=\tan^{-1}\frac{1}{2},\ x=0\Rightarrow u=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$=\frac{1}{5}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c=\frac{1}{15}\ln\left|5z+\sqrt{25z^2-9}\right|+c$$

۱۳. $\int_{8/\sqrt{3}}^{8}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

حل:

$$\begin{cases} x=4\sec\theta \Rightarrow dx=4\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\ x=8 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{4\sec\theta\sqrt{16(\sec^2\theta-1)}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{24}$$

۱۴. $\int_2^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$

حل:

$$\begin{cases} x=\sqrt{3}\sec\theta \Rightarrow dx=\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\ x=2 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},\ x=\sqrt{6} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta.\sqrt{3(\sec^2\theta-1)}}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

۱۵. $\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{dx}{2x\sqrt{4x^2-1}}$

حل:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sec\theta \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\ x=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{24}$$

در مسائل ۱۶-۲۲، انتگرالها را با جانشانیهای داده شده محاسبه کنید.

۱۶. $\int\frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-16}},\quad y=4\sec u$

حل:

$y=4\sec u \Rightarrow dy=4\sec u\tan u\,du \Rightarrow$

$$\int\frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-16}}=\int\frac{4\sec u\tan u\,du}{16\sec^2 u\sqrt{16(\sec^2 u-1)}}$$

۲۱. $\int_{5/4}^{5/3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x=\csc u$

حل

$x=\csc u \Rightarrow dx=-\csc u\cot u\,du$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\csc u\cot u\,du}{\csc^2 u\sqrt{\csc^2 u-1}} = -\int \frac{du}{\csc u} = -\int \sin u\,du$$

$$=\cos u+c=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c \Rightarrow I=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\Big]_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}=\frac{1}{5}$$

۲۲. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx, \quad x=\cos^2 u$

حل

$$\begin{cases} x=\cos^2 u \Rightarrow dx=-2\cos u\sin u\,du \\ x=1 \Rightarrow u=0,\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 u}\,(-2\sin u\cos u)}{\cos^2 u}du$$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin^2 u\,du}{\cos u} = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{(1-\cos^2 u)}{\cos u}du$$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (\sec u-\cos u)du=$$

$$-2\left[\ln|\sec u+\tan u|-\sin u\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0}=2\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$$

در مسائل ۲۳ـ۳۸ انتگرالها را محاسبه کنید.

۲۳. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$

حل

$$\begin{cases} x=5\sin u \Rightarrow dx=5\cos u\,du \\ x=0 \Rightarrow u=0;\ x=5 \Rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25(1-\sin^2 u)}\,.5\cos u\,du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 u\,du=\frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=\frac{25\pi}{4}$$

۲۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

حل

$2x=\sin u \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\cos u\,du \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{1}{2}\int du = \frac{1}{2}u+c$$

$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}2x+c$$

۲۵. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$

حل

$$\begin{cases} x-1=2\sin u \Rightarrow dx=2\cos u\,du \\ x=1 \Rightarrow u=0;\ x=2 \Rightarrow u=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4(x-1)^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos u\,du}{\sqrt{4(1-\sin^2 u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi}{6}$$

۲۶. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

حل

$$\begin{cases} x=2\tan u \Rightarrow dx=2\sec^2 u\,du \\ x=0 \Rightarrow u=0;\ x=2 \Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2 u\,du}{\sqrt{4(1+\tan^2 u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u\,du$$

$$=\ln|\sec u+\tan u|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$$

۲۷. $\int_0^1 \frac{12dx}{\sqrt{4-x^2}}$

حل

$$\begin{cases} x=2\sin u \Rightarrow dx=2\cos u\,du \\ x=0 \Rightarrow u=0;\ x=1 \Rightarrow u=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{12dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{24\cos u\,du}{2\cos u} = 12\int_0^{\frac{\pi}{6}} du = 2\pi$$

۲۸. $\int_0^{3/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$

حل

$$\begin{cases} x=2\tan u \Rightarrow dx=2\sec^2 u\,du \\ x=0 \Rightarrow u=0;\ x=\frac{3}{2} \Rightarrow u=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)} \frac{2\tan u\,2\sec^2 u\,du}{\sqrt{4(1+\tan^2 u)}}$$

$$=2\int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)} \tan u\sec u\,du=2\sec u\Big]_0^{\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \int (\csc^2 u - 1)du = -\cot u - u + c = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} - \sin^{-1}x + c$$

۳۴. $\displaystyle\int_0^{(1/2)\ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

حل

$$\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1,\ x = \ln\sqrt{3} \Rightarrow u = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_1^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u \Big]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

۳۵. $\displaystyle\int_{3/4}^{4/5} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

حل

$x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos u du}{\sin^2 u\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \frac{du}{\sin^2 u}$$

$$= \int \csc^2 u du = -\cot u + c = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}\Big]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{5}} = -\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

۳۶. $\displaystyle\int \frac{4x^2 dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

حل

$x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{4x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{4\sin^2 u \cos u du}{(1-\sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int \frac{4\sin^2 u \cos u}{\cos^3 u} du = 4\int \tan^2 u du = 4\int (\sec^2 u - 1)du$$

$$= 4\tan u - 4u + c = \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - 4\tan^{-1}x + c$$

۳۷. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

حل

$x = a\sin u \Rightarrow dx = a\cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos u du}{\left(a^2(1-\sin^2 u)\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos u du}{a^3\cos^3 u}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \sec^2 u du = \frac{1}{a^2}\tan u + c = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + c$$

۲۹. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$

حل

$$\begin{cases} x = \tan u \Rightarrow dx = \sec^2 u du \\ x = 0 \Rightarrow u = 0;\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 u.\sec^2 u}{\sqrt{1+\tan^2 u}} du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 u \sec u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 u - 1)\sec u.\tan u du$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 u - \sec u\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

۳۰. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

حل

$x = 2\sin u \Rightarrow dx = 2\cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{(2\sin u + 1)2\cos u du}{\sqrt{4(1-\sin^2 u)}}$$

$$= \int (2\sin u + 1)du = -2\cos u + u + c$$

۳۱. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1/4}}$

حل

$x = \frac{1}{2}\sec u \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sec u \tan u du \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec u.\tan u}{\frac{1}{2}\sec u\sqrt{\frac{1}{4}(\sec^2 u - 1)}} du$$

$$= 2\int du = 2u + c = 2\sec^{-1}2x + c$$

۳۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$

حل

$x = \sqrt{\frac{2}{5}}\sin u \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{2}{5}}\cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du = \frac{1}{\sqrt{5}}\int du$$

$$= \frac{u}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + c$$

۳۳. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

حل

$x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin^2 u}\cos u du = \int \cot^2 u du$$

۳۸. $\int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$

حل $\cos\theta=\sqrt{2}\cos u \Rightarrow -\sin\theta d\theta=-\sqrt{2}\sin u du \Rightarrow$

$$\int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}=\int \frac{\sqrt{2}\sin u du}{\sqrt{2(1-\cos^2 u)}}=\int \frac{\sin u}{\sin u}du$$

$$=\int du=u+c=\cos^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)+c$$

۳۹. $\int \frac{ydy}{\sqrt{16-y^2}}$ مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

الف) بدون استفاده از جانشانی مثلثاتی

ب) با استفاده از جانشانی مثلثاتی

حل a) $u^2=16-y^2 \Rightarrow 2udu=-2ydy \Rightarrow$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{16-y^2}}=-\int \frac{udu}{\sqrt{u^2}}=-\int du=-u+c$$

$$=-\sqrt{16-y^2}+c$$

b) $y=4\sin u \Rightarrow dy=4\cos u du \Rightarrow$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{16-y^2}}=\int \frac{16\sin u\cos u}{\sqrt{16(1-\sin^2 u)}}du$$

$$=\int \frac{16\sin u\cos u}{4\cos u}du=4\int \sin u du$$

$$=-4\cos u+c=-\sqrt{16-y^2}+c$$

۴۰. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\int_0^2 \frac{xdx}{4+x^2}$ ب) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$

حل a) $\int_0^2 \frac{xdx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2xdx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\ln(4+x^2)\Big]_0^2$

$$=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln 2$$

b) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^2$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)-0=\frac{\pi}{8}$$

۴۱. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$ مطلوب است محاسبهٔ

الف) بدون استفاده از جانشانی مثلثاتی

ب) با استفاده از جانشانی مثلثاتی

حل a) $x^2-1=u^2 \Rightarrow xdx=udu \Rightarrow$

$$\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{udu}{(u^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{du}{u^2}=\frac{-1}{u}+c$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

b) $x=\sec u \Rightarrow dx=\sec u.\tan u du \Rightarrow$

$$\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\sec u.\sec u.\tan u}{(\sec^2 u-1)^{\frac{3}{2}}}du$$

$$=\int \frac{\sec^2 u.\tan u}{\tan^3 u}du=\int \frac{\sec^2 u}{\tan^2 u}du=\int \csc^2 u du$$

$$=-\cot u+c=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

۴۲. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ب) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

حل a) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

۴۳. به کمک جانشانی $u=az$، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ ب) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

حل a) $\int \frac{du}{u^2+a^2}=\int \frac{adz}{a^2(z^2+1)}=\frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2+1}$

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}z+c=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

b) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\int \frac{adz}{\sqrt{a^2(1-z^2)}}=\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$$=\sin^{-1}z+c=\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

۴۴. به فرض $\theta=\sin^{-1}(u/2)$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را بر حسب u بیابید.

حل $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow \sin\theta=\frac{u}{2} \Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-u^2}}{2},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}$$

۴۵. مطلوب است محاسبهٔ موارد زیر بر حسب u و a

الف) $\sin\left(\tan^{-1}\frac{u}{a}\right)$ ب) $\cos\left(\sec^{-1}\frac{u}{a}\right)$

حل a) $\theta=\tan^{-1}\frac{u}{a} \Rightarrow \tan\theta=\frac{u}{a} \Rightarrow \sin\theta=\frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}$,

b) $\theta=\sec^{-1}\frac{u}{a}\Rightarrow\sec\theta=\frac{u}{a}\Rightarrow\cos\theta=\frac{a}{u}$

۴۶. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که در ربع اول واقع و به خم $y=\sqrt{1-(x^2/9)}$ محدود است.

حل

$$y=0\Rightarrow x=3,\ A=\int_a^b f(x)dx\Rightarrow$$

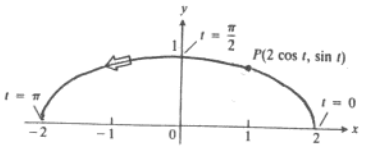
$$A=\int_0^3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$\begin{cases}x=3\sin\theta\Rightarrow dx=3\cos\theta d\theta\\ x=0\ \Rightarrow\ \theta=0\ ,x=3\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,.3\cos\theta d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{3\pi}{4}$$

۴۷. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم $x=2\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le\pi$ حول محور x شکل ۱۷.۷ را ببینید.



حل

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds,$$

$$x'=-2\sin t,\ y'=\cos t\Rightarrow x'^2+y'^2=4\sin^2 t+\cos^2 t$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{4\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t-3\cos^2 t}\,dt$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{4-3\cos^2 t}\,dt$$

$$\begin{cases}\cos t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\Rightarrow\sin t\,dt=\frac{-2}{\sqrt{3}}\cos\theta d\theta\Rightarrow\\ t=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3},\ t=\pi\Rightarrow\theta=\frac{-\pi}{3}\end{cases}$$

$$A=2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{-\pi}{3}}(2\cos\theta)(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{-8}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{-\pi}{3}}\cos^2\theta=\frac{-4\pi}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{-4\pi}{\sqrt{3}}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{-\pi}{3}}=\frac{8\pi^2+6\pi\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

۴۸. مطلوب است طول بخشی از سهمی $y=x^2$ که بین $x=0$ تا $x=\pi/3$ قرار دارد.

حل

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\tan u\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\sec^2 u\,du\\ x=0\ \Rightarrow u=0,x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow u=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

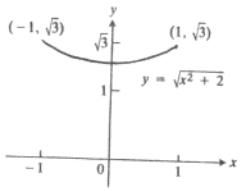
$$L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2 u}\,.\sec^2 u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^3 u\,du$$

۴۹. مطلوب است جوابی از معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=y^2(1-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}})$ که نقطه $(\sqrt{2},4/\pi)$ در آن صدق می‌کند.

حل

$$y=\frac{1}{\sin^{-1}(\frac{x}{2})+\sqrt{2}-x}$$

۵۰. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم $y=\sqrt{x^2+2}$، $-1\le x\le 1$ حول محور x شکل ۱۸.۷ را ببینید.



حل

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds,\ y=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x=x$$

$$\Rightarrow dx=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+1}}\,dx=\sqrt{\frac{2x^2+2}{x^2+1}}\,dx$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+2}\,.\sqrt{\frac{2x^2+2}{x^2+1}}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{cases} x=\tan\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta \\ x=-1 \Rightarrow \theta=\frac{-\pi}{4},\ x=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S=2\sqrt{2}\pi\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\,\sec^2\theta d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta$$

$$=\sqrt{2}\pi\left[\sec\theta\tan\theta+\mathrm{Ln}\,|\sec\theta+\tan\theta|\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\pi\left\{(\sqrt{2}+\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2}))-(-\sqrt{2}+\mathrm{Ln}(\sqrt{2}-1))\right\}$$

$$=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}+\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

۵۱. مطلوب است گشتاوری که یک سیم همگن نازک به چگالی δ و واقع بر خم $y=e^x$، $0\le x\le \mathrm{Ln}\sqrt{3}$ حول محور x ایجاد می‌کند.

حل

$$M_x=\int_a^b \delta y\,ds=\delta\int_0^{\mathrm{Ln}\sqrt{3}} e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

$$\begin{cases} e^x=\tan\theta \Rightarrow e^x dx=\sec^2\theta d\theta \\ x=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4},\ x=\mathrm{Ln}\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$M_x=\delta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\,\sec^2\theta d\theta=\delta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta d\theta$$

$$=\frac{\delta}{2}\left[\sec\theta\tan\theta+\mathrm{Ln}\,|\sec\theta+\tan\theta|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\delta}{2}\left[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right)\right]$$

۶.۷ انتگرالهای شامل ax^2+bx+c

Integral Involving ax^2+bx+c

در مسائل ۱-۲۴ انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-2x+5}$

حل

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-2x+5}=\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\Big]_1^3=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{8}$$

۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

حل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=I$$

$x-1=2\tan u \Rightarrow dx=2\sec^2 u\,du \Rightarrow$

$$I=\int \frac{2\sec^2 u\,du}{\sqrt{4(1+\tan^2 u)}}=\int \sec u\,du$$

$$=\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c=\mathrm{Ln}\,|\sqrt{x^2-2x+5}+(x-1)|+c$$

۳. $\int_1^3 \frac{x\,dx}{x^2-2x+5}$

حل

$$\int_1^3 \frac{x\,dx}{x^2-2x+5}=\int_1^3 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+4}$$

$$\int_1^3 \frac{(x-1+1)dx}{(x-1)^2+4}=\int_1^3 \frac{(x-1)dx}{(x-1)^2+4}+\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|(x-1)^2+4\right|+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_1^3=\mathrm{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}$$

۴. $\int_1^{5/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

حل با توجه به تمرین ۲ داریم:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\int (2\tan u+1)\sec u\,du$$

$$=2\sec u+\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

۵. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+4}$

حل

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\Big]_1^2=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

۶. $\int \frac{3dx}{9x^2-6x+5}$

حل

$$\int \frac{3dx}{9x^2-6x+5}=\int \frac{3dx}{(3x-1)^2+4}=I$$

$2\tan u=3x-1 \Rightarrow 2\sec^2 u\,du=3dx \Rightarrow$

$$I=\int \frac{2\sec^2 u}{4(\tan^2 u+1)}du=\frac{1}{2}\int du=\frac{1}{2}u+c$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)+c$$

۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$

حل با توجه به تمرین قبل داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+4}}$$

$$=\int \frac{\frac{2}{3}\sec^2 u\,du}{\sqrt{4(\tan^2 u+1)}}=\frac{1}{3}\int \sec u\,du$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{9x^2-6x+5}}{2}+\frac{3x-1}{2}\right|+c$$

۸. $\int \frac{3x\,dx}{9x^2-6x+5}$

حل با توجه به تمرین ۶ داریم:

$$\int \frac{3x\,dx}{9x^2-6x+5}=\int \frac{\frac{2}{3}(2\tan u+1)\sec^2 u}{4(\tan^2 u+1)}du$$

$$=\frac{1}{6}\int (2\tan u+1)du=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\,|\sec u|+\frac{u}{6}+c$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{9x^2-6x+5}}{2}\right|+\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)+c$$

۹. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}$

حل راهنمایی: تغییر متغیرهای تمرین ۶ را انجام دهید.

۱۰. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$

حل $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=I$

$x-1=\sec u \Rightarrow dx=\sec u\tan u\,du \Rightarrow$

$$I=\int \frac{\sec u.\tan u\,du}{\sqrt{\sec^2 u-1}}=\int \frac{\sec u.\tan u}{\tan u}du$$

$$=\int \sec u\,du=\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\mathrm{Ln}\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+c$$

۱۱. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

حل $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}=I$

$x+1=\sec u \Rightarrow dx=\sec u\tan u\,du \Rightarrow$

$$I=\int \frac{\sec u.\tan u}{\sqrt{\sec^2 u-1}}du=\int \sec u\,du=\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|$$

$$+c=\mathrm{Ln}\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+c$$

۱۲. $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$

حل $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+9}}=I$

$x+2=3\tan u \Rightarrow dx=3\sec^2 u\,du \Rightarrow$

$$I=\int \frac{3\sec^2 u\,du}{\sqrt{9(1+\tan^2 u)}}=\int \sec u\,du$$

$$=\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\mathrm{Ln}\left|\frac{x+2}{3}+\frac{\sqrt{x^2+4x+13}}{3}\right|+c$$

$$\Rightarrow I=\mathrm{Ln}\left|\frac{x+2}{3}+\frac{\sqrt{x^2+4x+13}}{3}\right|\Bigg]_{-2}^{1}=\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})$$

۱۳. $\int_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$

حل راهنمایی: تغییر متغیر تمرین قبل رانگاه کنید.

۱۴. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

حل $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=I$

$$\begin{cases} x+1=2\mathrm{Sin}u \Rightarrow dx=2\mathrm{Cos}u\,du \\ x=-1\Rightarrow u=0,\ x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\mathrm{Cos}u\,du}{\sqrt{4(1-\mathrm{Sin}^2 u)}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} du=\frac{\pi}{6}$$

۱۵. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

حل $I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-4}}, x-1=2\sec u\Rightarrow dx=2\sec u\tan u\,du\Rightarrow$

$$I=\int\frac{2\sec u.\tan u}{\sqrt{4(\sec^2u-1)}}du=\int\sec u du$$

$$=\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\mathrm{Ln}\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$$

۱۶. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

حل

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1}}=I$$

$x+1=\sec u \Rightarrow dx=\sec u.\tan u du \Rightarrow$

$$I=\int\frac{\sec u.\tan u}{\sec u\sqrt{\sec^2u-1}}du=\int du=u+c=\sec^{-1}(x+1)+c$$

۱۷. $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

حل

$$\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{(x-1+2)}{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-2(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}dx+\int\frac{2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{2(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=-\sqrt{2x-x^2}+2\mathrm{Sin}^{-1}(x-1)+c$$

۱۸. $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

حل

$$\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}=I$$

$x-2=\sec u \Rightarrow dx=\sec u.\tan u du \Rightarrow$

$$I=\int\frac{(\sec u+1)\sec u\tan u}{\sqrt{\sec^2u-1}}du$$

$$=\int(\sec^2u+\sec u)du=\tan u+\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\sqrt{x^2-4x+3}+\mathrm{Ln}\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right|+c$$

۱۹. $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

حل

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=\int\frac{(x-2+2)dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$$

$$=\int\frac{(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}}dx+\int\frac{2dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+4x-x^2}+2\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

۲۰. $\int_5^6\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

حل

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-9}}$$

$x-1=3\sec u \Rightarrow dx=3\sec u\tan u du \Rightarrow$

$$I=\int\frac{3\sec u\tan u}{\sqrt{9(\sec^2u-1)}}du=\int\sec u du$$

$$=\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c=\mathrm{Ln}\left|\frac{x-1}{3}+\frac{\sqrt{x^2-2x-8}}{3}\right|+c$$

$$\Rightarrow I=\mathrm{Ln}\left|\frac{x-1}{3}+\frac{\sqrt{x^2-2x-8}}{3}\right|\Bigg]_5^6=\mathrm{Ln}\frac{9}{4+\sqrt{2}}$$

۲۱. $\int_0^1\frac{(1-x)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

حل

$$\int_0^1\frac{(1-x)}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx=\int_0^1\frac{(1-x)}{\sqrt{9-(1-x)^2}}dx$$

$$=\sqrt{9-(1-x)^2}\Big]_0^1=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$$

۲۲. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

حل

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=I$$

$x+2=\tan u \Rightarrow dx=\sec^2u du \Rightarrow$

$$I=\int\frac{(\tan u-2)\sec^2u}{\sec u}du=\int(\sec u\tan u-2\sec u)du$$

$$=\sec u-2\mathrm{Ln}\,|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\sqrt{x^2+4x+5}-2\mathrm{Ln}\left|\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right|+c$$

۲۳. $\int_{-2}^{-1}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$

حل

$$\int_{-2}^{-1}\frac{xdx}{x^2+4x+5}=\int_{-2}^{-1}\frac{xdx}{(x+2)^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + c$$

۲۴. $\int \frac{(2x+3)dx}{4x^2+4x+5}$

حل

$$\int \frac{(2x+3)}{4x^2+4x+5}dx = \int \frac{(2x+3)dx}{(2x+1)^2+4} = I$$

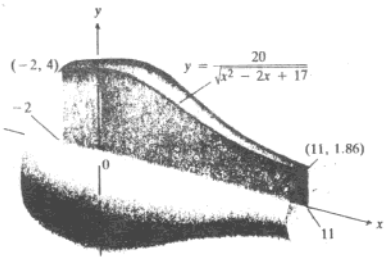
$2x+1=2\tan u \Rightarrow dx=\sec^2 u\,du$

$$I=\int \frac{(2\tan u+2)\sec^2 u}{4\sec^2 u}du = \frac{1}{2}\int(\tan u+1)du$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sec u|+\frac{1}{2}u+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{2}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)+c$$

۲۵. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به محور x، $y=20/\sqrt{x^2-2x+17}$، و خطوط $x=-2$ و $x=11$ حول محور x خم



حل

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi\int_{-2}^{11}\left(\frac{20}{\sqrt{x^2-2x+17}}\right)^2 dx$$

$$=400\pi\int_{-2}^{11}\frac{dx}{16+(x-1)^2} = 100\pi\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{4}\right)\Big]_{-2}^{11}$$

$$=100\pi\left[\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)\right]$$

۲۶. مطلوب است مقدار میانگین تابع $f(x)=\frac{4}{(x^2-4x+8)}$ روی بازهٔ از $x=2$ تا $x=4$

حل

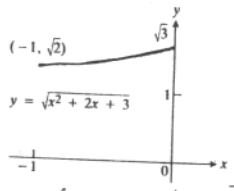
$$AV=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$$

$$AV=\frac{1}{4-2}\int_2^4 \frac{4}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{4dx}{(x-2)^2+4}$$

$$\begin{cases} x-2=2\tan u \Rightarrow dx=\sec^2 u\,du \\ x=2\Rightarrow u=0,\ x=4\Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$AV=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sec^2 u}{4\sec^2 u}du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{4}$$

۲۷. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران قوس $y=\sqrt{x^2+2x+3}$، $-1\le x\le 0$ حول محور x شکل ۲۰.۷ را ببینید.



حل

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_{-1}^{0}\sqrt{x^2+2x+3}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{0}\sqrt{x^2+2x+3}\cdot\sqrt{\frac{2x^2+4x+4}{x^2+2x+3}}$$

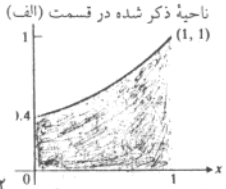
$$=2\pi\int_{-1}^{0}\sqrt{2x^2+4x+4}\,dx = 2\sqrt{2}\pi\int_{-1}^{0}\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_{-1}^{0}\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 u\,du$$

$$=\pi\sqrt{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$$

۲۸. الف) مطلوب است مساحت ناحیهٔ محدود به خم $y=2/(x^2-4x+5)$، محورهای مختصات، و خط $x=1$ (شکل ۲۱.۷)

ب) گشتاوری را بیابید که یک ورقهٔ ناهمگن نازک به چگالی δ و منطبق بر ناحیهٔ ذکر شده در قسمت (الف) حول محور y ایجاد می‌کند.



حل

a) $$A=\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{x^2-4x+5}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{2dx}{(x-2)^2+1} = \int_{\tan^{-1}(-2)}^{\frac{-\pi}{4}} \frac{2\sec^2 u}{\sec^2 u}du$$

$$\begin{cases} x+2=\tan u \Rightarrow dx=\sec^2 u\,du \\ x=-2\Rightarrow u=0,\ x=-1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan u-2)\sec^2 u}{\tan^2 u+1}du = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan u-2)du$$

$$=\ln|\sec u| - 2u\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$=2\int_{\tan^{-1}(-2)}^{\frac{-\pi}{2}} du=\frac{-\pi}{2}+2\tan^{-1}(2)$$

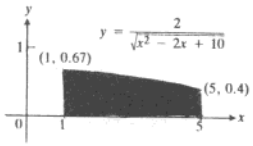
b) $$M_y=\delta\int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2-4x+5}=\delta\int_0^1 \frac{2x\,dx}{(x-2)^2+1}$$

$$=\delta\int_{\tan^{-1}(-2)}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2(\tan u+2)\sec^2 u\,du}{\sec^2 u}$$

$$=2\delta\int_{\tan^{-1}(-2)}^{-\frac{\pi}{2}} (\tan u+2)du$$

$$=2\delta\,[\,\mathrm{Ln}\,|\sec u|\,+2u]_{\tan^{-1}(-2)}^{-\frac{\pi}{2}}$$

۲۹. مطلوب است مرکز جرم یک ورقهٔ همگن نازک که به محور x خم $y=2/\sqrt{x^2-2x+10}$ و خطوط $x=1$ و $x=5$ محدود است (شکل ۲۲.۷)



حل
$$\bar{x}=\frac{4+\mathrm{Ln}9}{\mathrm{Ln}9},\quad \bar{y}=\frac{2\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)}{3\mathrm{Ln}9}$$

مطلوب است حدهای مذکور در مسائل ۳۰ و ۳۱.

۳۰. $$\lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$$

حل
$$\lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}=\lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-4}}=I$$

$$\begin{cases} x+1=2\sec u\Rightarrow dx=2\sec u.\tan u\,du \\ x=3\Rightarrow u=\frac{\pi}{3},\ x\to 1^+\Rightarrow u\to 0^+ \end{cases}\Rightarrow$$

$$I=\lim_{b\to 0^+}\int_b^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sec u\tan u}{4\sec u\tan u}du$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_b^{\frac{\pi}{3}} du=\frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+} u\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$$

۳۱. $$\lim_{a\to -5^+}\int_a^{-4} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-15}}$$

حل
$$\lim_{a\to -5^+}\int_a^{-4} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-15}}=\lim_{a\to -5^+}\int_a^{-4} \frac{dx}{\sqrt{1-(x+4)^2}}$$

$$=\lim_{a\to -5^+}\mathrm{Sin}^{-1}(x+4)\Big]_a^{-4}=-\mathrm{Sin}(-1)=\frac{\pi}{2}$$

۷.۷ انتگرالگیری از توابع گویا به روش کسرهای ساده

The integration of rational functions partial fractions

در مسائل ۱-۱۰، کسرها را به کسرهای ساده تجزیه کنید.

۱. $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

حل
$$\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}\Rightarrow$$
$$5x-13=A(x-2)+B(x-3)\Rightarrow\begin{cases} x=2\Rightarrow B=2 \\ x=3\Rightarrow A=2\end{cases}$$

۲. $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

حل
$$\frac{5x-7}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow$$
$$5x-7=A(x-1)+B(x-2)\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow B=2 \\ x=2\Rightarrow A=3\end{cases}$$

۳. $\frac{x+2}{(x+1)^2}$

حل
$$\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}\Rightarrow$$
$$x+4=A(x+1)+B\Rightarrow\begin{cases} x=-1\Rightarrow B=3 \\ x=0\Rightarrow A=1\end{cases}$$

۴. $\frac{2x+2}{x^2-2x+1}$

حل
$$\frac{2x+2}{(x^2-2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\Rightarrow$$
$$2(x+1)=A(x-1)+B\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow B=4 \\ x=0\Rightarrow A=2\end{cases}$$

۵. $\frac{x+1}{x^2(x-1)}$

حل
$$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}\Rightarrow$$
$$x+1=Ax(x-1)+B(x-1)+cx^2$$
$$\Rightarrow x=0\Rightarrow B=-1,\quad x=1\Rightarrow C=2,\ x=-1\Rightarrow A=-2$$

۶. $\frac{z}{z^3-z^2-6z}$

حل
$$\frac{z}{z^3-z^2-6z}=\frac{z}{z(z-3)(z+2)}=\frac{1}{(z-3)(z+2)}$$
$$=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z+2}\Rightarrow 1=A(z+2)+B(z-3)\Rightarrow$$
$$z=-2\Rightarrow B=\frac{-1}{5};\ z=3\Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

۷. $\frac{x^2+8}{x^2-5x+6}$ (یادتان باشد که اول تقسیم کنید)

حل
$$\frac{x^2+8}{x^2-5x+6}=1+\frac{5x+2}{x^2-5x+6}=1+\frac{5x+2}{(x-2)(x-3)}$$
$$=1+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Rightarrow 5x+2=A(x-3)+B(x-2)$$
$$\Rightarrow x=3\Rightarrow B=17,\quad x=2\Rightarrow A=-12$$

۸. $\frac{4}{x^3+4x}$

حل

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{x^2+4}\Rightarrow$$

$$4=A(x^2+4)+(Bx+C)x\Rightarrow$$

$$4=(A+B)x^2+Cx+4A\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\C=0\\4A=4\end{cases}\Rightarrow A=1=-B,\ C=0$$

۹. $\frac{3}{x^2(x^2+9)}$

حل

$$\frac{3}{x^2(x^2+9)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+9}\Rightarrow$$

$$3=Ax(x^2+9)+B(x^2+9)+(Cx+D)x^2$$

$$\Rightarrow 3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+9Ax+9B$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\B+D=0\\A=0\ ,\ 9B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=0,A=0\\B=\frac{1}{3}\Rightarrow D=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{x^2(x^2+9)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+9)}$$

۱۰. $\frac{x^3-1}{(x^2+x+1)^2}$

حل

$$\frac{x^3-1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

در مسائل ۱۱ـ۴۹، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱۱. $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1-x^2}$

حل

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}\Rightarrow 1=A(1+x)+B(1-x)$$

$$x=1\Rightarrow A=\frac{1}{2},\ \ x=-1\Rightarrow B=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$\frac{-1}{2}\operatorname{Ln}|1-x|+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1+x|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}3=\operatorname{Ln}\sqrt{3}$$

۱۲. $\int_1^2\frac{dx}{x^2+2x}$

حل

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow$$

$$1=A(x+2)+Bx\Rightarrow\begin{cases}x=0\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{2}\\x=-2\ \Rightarrow\ B=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_1^2\frac{dx}{x^2+2x}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x|-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x+2|\Big]_1^2=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{x}{x+2}\right|\Big]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{2}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{3}{2}$$

۱۳. $\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{x^3}{x^2+1}dx$

حل

$$\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{x^3+x-x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+1)\Big]_0^{2\sqrt{2}}=4-\operatorname{Ln}3$$

۱۴. $\int_1^2\frac{dx}{x^3+x}$

حل

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x\Rightarrow A=1,\ C=0,\ B=-1$$

$$\Rightarrow\int_1^2\frac{dx}{x^3+x}=\int_1^2\frac{dx}{x}-\int_1^2\frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$=\operatorname{Ln}|x|-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2+1|\Big]_1^2=\frac{3}{2}\operatorname{Ln}2-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}5$$

۱۵. $\int_{1/4}^{3/4}\frac{dx}{x-x^2}$

حل

$$\frac{1}{x(1-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1-x}\Rightarrow 1=A(1-x)+Bx\Rightarrow$$

$$x=1\Rightarrow B=1,\ x=0\Rightarrow A=1\Rightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x(1-x)}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{x}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{dx}{1-x}$$

$$=\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}|1-x|\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=\operatorname{Ln}\left|\frac{x}{1-x}\right|\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=2\operatorname{Ln}3$$

۱۶. $\int_{-1}^{0}\frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$

حل

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow$$

$$x=A(x-1)+B(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x=2\Rightarrow A=2\\x=1\Rightarrow B=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x\,dx}{(x-2)(x-1)}=\int_{-1}^{0}\frac{2dx}{x-2}-\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-1}$$

$$=2\operatorname{Ln}|x-2|-\operatorname{Ln}|x-1|\Big]_{-1}^{0}=3\operatorname{Ln}2-2\operatorname{Ln}3=\operatorname{Ln}\frac{8}{9}$$

۱۷. $\int\frac{x+4}{x^2+5x-6}dx$

حل

$$\int\frac{x+4}{x^2+5x-6}=\int\frac{\frac{2}{7}dx}{x+6}+\int\frac{\frac{5}{7}dx}{x-1}$$

$$=\frac{2}{7}Ln|x+6|+\frac{5}{7}Ln|x-1|+c$$

۱۸. $\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}dx$

حل

$$\int \frac{2x+1}{(x-4)(x-3)}dx=\int\frac{9dx}{x-4}-\int\frac{7dx}{x-3}$$

$$=9Ln|x-4|-7Ln|x-3|+c$$

۱۹. $\int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+2x+1}dx$

حل

$$\frac{3x^2}{x^2+2x+1}=3+\frac{-6x-3}{x^2+2x+1}=3+\frac{-6x-3}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{-6x-3}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}\Rightarrow$$

$$-6x-3=A(x+1)+B\Rightarrow A=-6,\ B=3\Rightarrow$$

$$I=\int_0^1\left(3-\frac{6}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=3x-6Ln|x+1|-\frac{3}{x+1}\Big]_0^1=\frac{9}{2}-6Ln2$$

۲۰. $\int\frac{d\theta}{\theta^3+\theta^2-2\theta}$

حل

$$\frac{1}{\theta^3+\theta^2-2\theta}=\frac{1}{\theta(\theta^2+\theta-2)}=\frac{1}{\theta(\theta+2)(\theta-1)}$$

$$=\frac{A}{\theta}+\frac{B}{\theta+2}+\frac{C}{\theta-1}\Rightarrow A=\frac{-1}{2},\ B=\frac{1}{6},\ C=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I=\frac{-1}{2}\int\frac{d\theta}{\theta}+\frac{1}{6}\int\frac{d\theta}{\theta+2}+\frac{1}{3}\int\frac{d\theta}{\theta-1}$$

$$=\frac{-1}{2}Ln|\theta|+\frac{1}{6}Ln|\theta+2|+\frac{1}{3}Ln|\theta-1|+c$$

۲۱. $\int\frac{xdx}{x^2+4x-5}$

حل

$$\int\frac{xdx}{(x+5)(x-1)}=\int\frac{\frac{5}{6}dx}{x+5}+\int\frac{\frac{1}{6}dx}{x-1}$$

$$=\frac{5}{6}Ln|x+5|+\frac{1}{6}Ln|x-1|+c$$

۲۲. $\int_4^8\frac{xdx}{x^2-2x-3}$

حل

$$\int_4^8\frac{xdx}{x^2-2x-3}=\frac{3}{4}\int_4^8\frac{dx}{x-3}+\frac{1}{4}\int_4^8\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{3}{4}Ln|x-3|+\frac{1}{4}Ln|x+1|\Big]_4^8=\frac{1}{2}(Ln5+Ln3)$$

۲۳. $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+4x-5}$

حل

$$I=\int\frac{(x+1)}{(x+5)(x-1)}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+5}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$=\frac{2}{3}Ln|x+5|+\frac{1}{3}Ln|x-1|+c$$

۲۴. $\int\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$

حل

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}\Rightarrow A=3,\ B=-1\Rightarrow$$

$$I=\int(x-2)dx+\int\frac{3dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+3Ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$$

۲۵. $\int_1^3\frac{dx}{x(x+1)^2}$

حل

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\Rightarrow A=1,\ B=C=-1\Rightarrow$$

$$I=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=Lnx-Ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\Big]_1^3=Ln(\frac{3}{2})-\frac{1}{4}$$

۲۶. $\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

حل

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)\Rightarrow A=\frac{1}{2}=C,B=\frac{-1}{2}\Rightarrow$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}Ln|x+1|-\frac{1}{4}Ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x\Big]_0^1=\frac{1}{4}Ln2+\frac{\pi}{8}$$

۲۷. $\int\frac{(x+3)dx}{2x^3-8x}$

حل

$$\frac{x+3}{2x^3-8x}=\frac{x+3}{2x(x^2-4)}=\frac{A}{2x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow x+3=A(x^2-4)+B(2x)(x+2)+C(2x)(x-2)$$

$$\Rightarrow A=\frac{-3}{4},\ B=\frac{5}{16},\ C=\frac{1}{16}\Rightarrow$$

$$\int\frac{(x+3)}{2x^3-8x}dx=\frac{-3}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{16}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{-3}{8}Ln|x|+\frac{5}{16}Ln|x-2|+\frac{1}{16}Ln|x+2|+c$$

۲۸. $\int\frac{Cosx\,dx}{Sin^2x+Sinx-6}$

حل

$u=\sin x \Rightarrow du=\cos x\,dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+\sin x-6}=\int \frac{du}{u^2+u-6}=\int \frac{du}{(u+3)(u-2)}$$

$$=-\frac{1}{5}\int \frac{du}{u+3}+\frac{1}{5}\int \frac{du}{u-2}=\frac{-1}{5}\ln|u+3|+\frac{1}{5}\ln|u-2|+c$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|\sin x+3|+\frac{1}{5}\ln|\sin x-2|+c$$

۲۹. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x^2dx}{x^2+1}$

حل

$$\frac{5x^2}{x^2+1}=\frac{5x^2+5-5}{x^2+1}=\frac{5(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{5}{x^2+1}=5-\frac{5}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x^2}{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(5-\frac{5}{x^2+1}\right)dx$$

$$=5x-5\tan^{-1}x\Big]_0^{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}-\frac{5\pi}{3}$$

۳۰. $\displaystyle\int_2^6 \frac{x^3dx}{x^2-2x+1}$

حل

$$\frac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\Rightarrow 3x-2=A(x-1)+B\Rightarrow A=3=B\Rightarrow$$

$$I=\int_2^6\left(x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2x+3\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}\Big]_2^6=\frac{132}{5}+3\ln 5$$

۳۱. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3+x}{x^2+1}dx$

حل

$$\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x\Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=0$$

البته جواب نهایی با توجه به فرد بودن انتگرالده قابل پیش بینی است.

۳۲. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$

حل

$u=\cos\theta \Rightarrow du=-\sin\theta\,d\theta \Rightarrow$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{u^2+u-2}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{(u+2)(u-1)}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{-1}{3}}{u+2}+\frac{\frac{1}{3}}{u-1}\right)du$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|u-1|-\ln|u+2|\right)\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+2}\right|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}$$

۳۳. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^3+x}dx$

حل

$$\frac{3x^2+x+4}{x^3+x}=\frac{3x^2+x+4}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 3x^2+x+4=A(x^2+1)+Bx^2+Cx\Rightarrow 3x^2+x+4$$

$$=(A+B)x^2+Cx+A\Rightarrow A=4,\ B=-1,\ C=1\Rightarrow$$

$$\int\frac{3x^2+x+4}{x^3+x}dx=\int\left(\frac{4}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=4\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+c$$

۳۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

حل

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{[(x-1)(x+1)]^2}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{4},\ B=C=D=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}\int\left[\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{-1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{\ln|x+1|}{4}-\frac{1}{4(x+1)}+c$$

۳۵. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+4x+3}dx$

حل

$$\frac{x^3+4x^2}{x^2+4x+3}=\frac{x^3+4x^2+3x-3x}{x^2+4x+3}=\frac{x(x^2+4x+3)}{x^2+4x+3}-\frac{3x}{x^2+4x+3}$$

$$=x-\frac{3x}{x^2+4x+3}=x+\frac{3}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{9}{2}\frac{1}{x+3}\Rightarrow$$

$$\int\frac{x^3+4x^2}{x^2+4x+3}dx=\int\left(x+\frac{3}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{9}{2}\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x+1|-\frac{9}{2}\ln|x+3|+c$$

۳۶. $\displaystyle\int \frac{4x+4}{x^2(x^2+2)}dx$

حل

$$\frac{4x+4}{x^2(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+2}{x^2+2}\Rightarrow A=B=2, D=C=-2\Rightarrow$$

$$\int\frac{4x+4}{x^2(x^2+2)}dx=2\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx$$

$$=2\ln|x|-\frac{2}{x}-\ln(x^2+2)-\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$

۳۷. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx$

حل

$$\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\Rightarrow A=D=0, B=1, C=2\Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]dx$$

$$=\tan^{-1}x-\frac{1}{x^2+1}\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

۳۸. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^3-x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

حل

$$\frac{x^3-x}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{x(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{x(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\Rightarrow A=1,B=0,C=1\Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^3-x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}\right]dx$$

$$=\mathrm{Ln}\,|x-1|+\tan^{-1}x\Big]_{-1}^{0}=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Ln}\,2$$

۳۹. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

حل

$$\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=\int_{-1}^{0}\left[\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$=-\tan^{-1}x-\frac{1}{x-1}\Big]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

۴۰. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx$

حل

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+2x+1)}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\Rightarrow A=\frac{1}{4},B=\frac{3}{4},C=\frac{-1}{2}\Rightarrow$$

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\,|x-1|+\frac{3}{4}\mathrm{Ln}\,|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+C$$

۴۱. $\displaystyle\int_0^{\mathrm{Ln}\,2}\frac{e^t dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

حل

$$\begin{cases}u=e^t\Rightarrow du=e^t dt\\ t=0\Rightarrow u=1,t=\mathrm{Ln}\,2\Rightarrow u=e^{\mathrm{Ln}\,2}=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_0^{\mathrm{Ln}\,2}\frac{e^t dt}{e^{2t}+3e^t+2}=\int_1^2\frac{du}{u^2+3u+2}$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+2}\right)du=\mathrm{Ln}\left|\frac{u+1}{u+2}\right|\Big]_1^2=\mathrm{Ln}\frac{9}{8}$$

۴۲. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

حل در چنین مواردی ساده‌تر است از تغییر متغیرهای مثلثاتی استفاده کرد.

$$\begin{cases}x=\tan u\Rightarrow dx=\sec^2 u\,du\\ x=0\Rightarrow u=0;x=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 u}{\sec^4 u}du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)du=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$$

۴۳. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4dx}{(x^2+1)^2}$ ۶

حل

$$\int_0^1\frac{x^4dx}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^1\frac{x^4+2x^2+1-2x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}-\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}\right]dx=\int_0^1\left(1-\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=x\Big]_0^1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\tan^2 u+1)\sec^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}du$$

$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\tan^2 u+1)\sec^2 u}{\sec^4 u}du=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sin^2 u+\cos^2 u)du$$

$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin^2 u)du=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{1-\cos 2u}{2}\right)du$$

$$=1+\left[\frac{-3}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{4}-\frac{3\pi}{8}$$

۴۴. $\displaystyle\int\frac{(4x^3-20x)dx}{x^4-10x^2+9}$

حل (راهنمایی: $u=x^4-10x^2+9$)

۴۵. $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ (راهنمایی: جانشانی $u=\sqrt{x}$ را به کار ببرید.)

حل

$$u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\Rightarrow 2u\,du=dx\Rightarrow$$

$$\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{1-u}{1+u}.2u\,du=2\int\frac{u-u^2}{1+u}du$$

$$2\int\left(-u+2-\frac{2}{u+1}\right)du=-u^2+4u-4\mathrm{Ln}\,|u+1|+c$$

$$=-x+4\sqrt{x}-4\mathrm{Ln}(\sqrt{x}+1)+c$$

۴۶. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (راهنمایی: جانشانی $u=\sqrt{x}$ را به کار ببرید.)

حل

$u^2=x \Rightarrow 2udu=dx \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{1+u} = 2\int \frac{(u+1-1)}{u+1}du$$

$$=2\int \left(1-\frac{1}{u+1}\right)du = 2u-2Ln\,|u+1| + c$$

$$=2\sqrt{x}-2Ln\,|\sqrt{x}+1| + c$$

۴۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ (راهنمایی: جانشانی $x=u^6$ را به کار ببرید.)

حل

$u^6=x \Rightarrow 6u^5du=dx \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5du}{u^3+u^2} = 6\int \frac{u^3}{u+1}du$$

$$=6\int \frac{u^3-1+1}{u+1}du = 6\int \left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=2u^3-3u^2+6u-6Ln\,|u+1|+c$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6Ln\,|\sqrt[6]{x}+1| + c$$

۴۸. $\int x\,Ln(x+5)\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=Ln\,|x+5| \Rightarrow du=\frac{dx}{x+5} \\ dv=x\,dx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int x\,Ln\,|x+5|\,dx = \frac{x^2}{2}Ln\,|x+5| - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{x^1}{x+5}dx}_{*}$$

$$*=\int \frac{x^2}{x+5}dx = \int \frac{x^2-25+25}{x+5}dx$$

$$=\int \left(\frac{x^2-25}{x+5}+\frac{25}{x+5}\right)dx = \int \left(x-5+\frac{25}{x+5}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-5x+25Ln\,|x+5|+c$$

۴۹. $\int_0^1 Ln(x^2+1)dx$

حل

$$\begin{cases} u=Ln(x^2+1) \Rightarrow du=\frac{2x}{x^2+1} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 Ln(x^2+1)dx = x\,Ln(x^2+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$=Ln2-\int_0^1 \left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=Ln2-\left[2x+2\tan^{-1}x\right]_0^1 = Ln2-2+\frac{\pi}{2}$$

۵۰. برا محاسبهٔ $\int x^2dx/(x^2-1)$ از راه کسرهای ساده، نخست x^2 را بر x^2-1 تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}.$$

اگر متوجه هم درجه بودن x^2 و x^2-1 نشویم و چنین بنویسیم

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}.$$

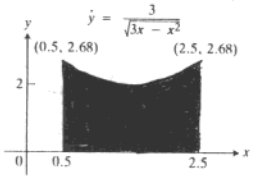
چه اشتباهی پیش می‌آید؟ بکوشید A و B را به دست آورید.

حل

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$

$$x^2=(A+B)x+A-B \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=0$$

۵۱. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به محور x، خم $y=3/\sqrt{3x-x^2}$، و خطوط $x=1/2$ و $x=5/2$ حول محور x



حل

$$v=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2dx = \pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{9}{3x-x^2}dx = 6\pi Ln5$$

۵۲. مطلوب است مختص x مرکز جرم یک ورقهٔ همگن نازک که در ربع اول و به محور x، خم $y=\tan^{-1}x$، و خط $x=\sqrt{3}$ محدود است.

حل

$$M=\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\sqrt{3}} \tan^{-1}x\,dx$$

$$\begin{cases} u=\tan^{-1}x \Rightarrow du=\frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$$

$$M=x\tan^{-1}x\Big]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$=\left[x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}Ln\,|x^2+1|\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}-3Ln2}{3}$$

$$M_y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3-\tan^2y)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4-\sec^2y)dy$$

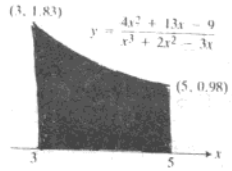
$$=\frac{1}{2}(4y-\tan y)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{3}-6Ln2}$$

۵۳. مطلوب است مختص x مرکز جرم یک ورقهٔ همگن نازک محدود به محور x، خطوط x=۳ و x=۵، و خم

$$y=\frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}$$

شکل (۲۴.۷).



حل

$$M=\int_3^5 \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}\,dx=3\text{Ln}5-2\text{Ln}3$$

$$M_y=\int_3^5 \frac{x(4x^2+13x-9)}{x^3+2x^2-3x}\,dx=8+8\text{Ln}2-3\text{Ln}3$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{8+8\text{Ln}2-3\text{Ln}3}{3\text{Ln}5-2\text{Ln}3}$$

۵۴. مطلوب است طول قوس $y=\text{Ln}(1-x^2),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}$

حل

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y'=\frac{-2x}{1-x^2}\Rightarrow L=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-1+2}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-1\right)dx$$

$$=\text{Ln}\left|\frac{x+1}{1-x}\right|-x\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\text{Ln}3-\frac{1}{2}$$

۸.۷ انتگرالهای غیرعادی Improper Integrals

در مسائل ۱ـ۱۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

حل $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\tan^{-1}x\Big]=\frac{\pi}{2}$

۲. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

حل $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\Big]_a^1=2$

۳. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

حل $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^b\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}+\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$

$$=\lim_{b\to 0^-}3\sqrt[3]{x}\Big]_{-1}^b+\lim_{a\to 0^+}3\sqrt[3]{x}\Big]_b^1=6$$

۴. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/001}}$

حل $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{1/001}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^{1/001}}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1000}{x^{0/001}}\right]_1^b=1000$

۵. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

حل $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{4-x}}=\lim_{b\to 4^-}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{4-x}}=\lim_{b\to 4^-}-2\sqrt{4-x}\Big]_0^b=4$

۶. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

حل $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{b\to 1^-}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{b\to 1^-}\text{Sin}^{-1}x\Big]_0^b=\frac{\pi}{2}$

۷. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0/999}}$

حل $\int_0^1\frac{dx}{x^{0/999}}=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{x^{0/999}}=\lim_{a\to 0^+}1000x^{0/001}\Big]_a^1=1000$

۸. $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{4-x}$

حل $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{4-x} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{4-x} = \lim_{a\to-\infty} -\ln|4-x|\Big]_{a}^{2} = \infty$

۹. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2-x}\,dx$

حل $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int_{2}^{\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx$

$= \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \lim_{b\to\infty} \left(\ln|x-1| - \ln|x|\right)\Big]_{2}^{b} = \ln 2$

۱۰. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

حل $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

$= \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

$= \lim_{a\to 0^+} 2\tan^{-1}\sqrt{x}\Big]_{a}^{1} + \lim_{b\to\infty} 2\tan^{-1}\sqrt{x}\Big]_{1}^{b}$

$= 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$

در مسائل ۱۱-۴۰، تعیین کنید که آیا انتگرالها همگرایند یا واگرا. (در برخی از موارد، ضرورتی ندارد انتگرال را محاسبه کنید تا بتوانید به این پرسش پاسخ دهید. نام آزمونی را که به کار می‌بردید ذکر کنید.)

توجه کنید Divergence به معنای واگراست و Convergence بمعنای همگراست.

۱۱. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

حل $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big]_{1}^{b} = \infty$ is divergence

۱۲. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

حل $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\Big]_{1}^{b} = \frac{1}{2}$

۱۳. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

حل $\frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^3}$ بنا به تمرین و آزمون تسلط انتگرال یاد شده همگراست.

۱۴. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

حل $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

$= \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^3} + \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^3}$

$= \lim_{a\to 0^+} \frac{-1}{2x^2}\Big]_{0}^{1} + \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{2x^2}\Big]_{1}^{b} = \infty$ is div.

۱۵. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}+1}$

حل $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\frac{3}{2}}} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{\frac{3}{2}}} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}$

$\le \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{\frac{3}{2}}} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$

هر دو انتگرال فوق همگراست پس بنا به آزمون تسلط همگرایی همگراست.

۱۶. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}$

حل $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$= \lim_{b\to\infty} -\ln(1+e^{-x})\Big]_{0}^{b} = \ln 2$ is cov

۱۷. $\int_{0}^{\pi/2} \tan x\,dx$

حل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{b} \tan x\,dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln|\sec x|\Big]_{0}^{b} = \infty$

۱۸. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

حل $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^2}$

هر دو انتگرال مجازی فوق واگراست.

۱۹. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/5}}$

حل $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}} = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}} + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}}$

$= \lim_{b\to 0^-} \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}}\Big]_{-1}^{b} + \lim_{a\to 0^+} \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}}\Big]_{a}^{1} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

۲۰. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

حل $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$

۲۱. $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

حل $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x-1}\Big]_{2}^{b} = \infty$

۲۲. $\int_{1}^{\infty} \frac{5}{x}\,dx$

حل $\int_{1}^{\infty} \frac{5\,dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{5\,dx}{x} = \lim_{b\to\infty} 5\ln|x|\Big]_{1}^{b} = \infty$

۲۳. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

حل $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{1+x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to 1^-}\int_0^b\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{2}\lim_{a\to 1^+}\int_a^2\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to 1^-}\operatorname{Ln}|1-x|\Big]_0^b-\frac{1}{2}\lim_{a\to 1^+}\operatorname{Ln}|1-x|\Big]_a^2$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1+x|\Big]_0^2=-\infty$$

۲۴. $\int_2^\infty\frac{dx}{(x+1)^2}$

حل $\int_2^\infty\frac{dx}{(x+1)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{(x+1)^2}=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{x+1}\Big]_2^b=\frac{1}{3}$

۲۵. $\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

حل $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6+1}}{\sqrt{x^6}}=1$

پس بنا به آزمون مقایسه حدی انتگرال یاد شده همگراست چون انتگرال $\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x^6}}dx$ همگراست.

۲۶. $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

حل $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^b\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$=\lim_{b\to 0^-}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big]_{-1}^b+\lim_{a\to 0^+}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big]_a^1=0$$

۲۷. $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$

حل $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x}dx$

$$=\lim_{b\to\infty}-e^{-x}(x^2+2x+2)\Big]_0^b=2$$

۲۸. $\int_1^\infty\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$

حل چون $\int_1^\infty\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx\le\int_1^\infty\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx=\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

و چون $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ همگراست پس انتگرال داده شده نیز همگراست.

۲۹. $\int_\pi^\infty\frac{2+\cos x}{x}dx$

حل $1\le 2+\cos x\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}<\frac{2+\cos x}{x}$

و چون $\int_0^\infty\frac{dx}{x}$ واگراست پس انتگرال یاد شده نیز واگراست.

۳۰. $\int_1^\infty\frac{\operatorname{Ln}x}{x}dx$

حل $\int_1^\infty\frac{\operatorname{Ln}x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\operatorname{Ln}x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}x)^2\Big]_1^b=\infty$

۳۱. $\int_6^\infty\frac{1}{\sqrt{x+5}}dx$

حل $\int_6^\infty\frac{1}{\sqrt{x+5}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_6^b\frac{dx}{\sqrt{x+5}}=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{x+5}\Big]_6^b=\infty$

۳۲. $\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{2x+10}}$

حل $\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{2x+10}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{2x+10}}=\lim_{b\to\infty}\sqrt{2x}\Big]_1^b=\infty$

۳۳. $\int_2^\infty\frac{2}{x^2-1}dx$

حل $\int_2^\infty\frac{2}{x^2-1}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\lim_{b\to\infty}\operatorname{Ln}|x-1|-\operatorname{Ln}|x+1|\Big]_2^b=\lim_{b\to\infty}\operatorname{Ln}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big]_2^b=\operatorname{Ln}3$$

۳۴. $\int_1^\infty\frac{1}{e^{\operatorname{Ln}x}}dx$

حل $\int_1^\infty\frac{1}{e^{\operatorname{Ln}x}}dx=\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\infty$

۳۵. $\int_2^\infty\frac{1}{\operatorname{Ln}x}dx$

حل اگر $x\ge 2$ آنگاه $\frac{1}{\operatorname{Ln}x}<\frac{1}{x}$ و چون $\int_2^\infty\frac{dx}{x}$ واگراست پس انتگرال یاد شده نیز واگراست.

۳۶. $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{e^x-x}}dx$

حل همگراست.

۳۷. $\int_1^\infty\frac{1}{e^x-2^x}dx$

حل $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-2^x}=1$

و چون $\int_1^\infty\frac{dx}{e^x}$ همگراست پس انتگرال یاد شده نیز همگراست.

۳۸. $\int_2^\infty\frac{1}{x^3-5}dx$

حل اگر $x\ge 2$ باشد داریم $\frac{1}{x^3-5}\le\frac{5}{x^3}$ و چون $\int_2^\infty\frac{5dx}{x^3}$ همگراست پس انتگرال یاد شده نیز همگراست.

۳۹. $\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$

(راهنمایی: این انتگرال را به ازای xهای نزدیک صفر با $\int dx/\sqrt{x}$ و به ازای xهای بزرگ با $\int dx/x^2$ مقایسه کنید.)

حل $\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}+\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$

$$=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}+\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}<\frac{1}{\sqrt{x}}\ \text{and}\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\ \Rightarrow\ \lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\ \text{exist}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^4}}{x^2}=1\ \text{and}\ \int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\ \text{exist}$$

$$\Rightarrow\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\ \text{is exist}$$

۴۰. $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$

حل $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx \le \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = 1$

۴۱. نشان دهید که

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1},\quad p>1$$

و نیز نشان دهید که همین انتگرال به ازای $p<1$ نامتناهی است. در مثال ۴ مقدار انتگرال به ازای $p=1$ مشخص شده است.

حل

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1}$$

if $p>1 \Rightarrow 1-p<0 \Rightarrow$ if $b\to\infty$ then $b^{1-p}\to 0$

if $p<1 \Rightarrow 1-p>0$ and if $b\to\infty$ then $b^{1-p}\to\infty$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} + 0 = \frac{1}{p-1}$$

۴۲. به ازای چه مقادیری از p انتگرالهای زیر همگرایند؟

الف) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^p}$ ب) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^p}$

ناحیهٔ مورد نظر در هر یک از مسائل ۴۵-۴۸ در ربع اول واقع و به خم $y=e^{-x}$ و محور x محدود است.

حل

a) $$\int_1^2 \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^p} = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^p}$$

$$= \lim_{a\to 1^+}\frac{(\mathrm{Ln}x)^{1-p}}{1-p}\Big]_a^2 = \frac{(\mathrm{Ln}2)^{1-p}}{1-p} - \lim_{a\to 1^+}\frac{(\mathrm{Ln}x)^{1-p}}{1-p}$$

$$\begin{cases} \text{if } p<1 \Rightarrow 1-p>0 \Rightarrow \text{if } p\to 1^+ \quad (\mathrm{Ln}a)^{1-p}\to 0 \\ \text{if } p>1 \Rightarrow 1-p<0 \Rightarrow \text{if } p\to 1^+ \quad (\mathrm{Ln}a)^{1-p}\to\infty \end{cases}$$

پس انتگرال یاد شده به ازای $p<1$ همگراست

b) $$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^p} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}x)^p} = \lim_{b\to\infty}\frac{(\mathrm{Ln}x)^{1-p}}{1-p}\Big]_2^b$$

با توجه به توضیحات قسمت (a) انتگرال به ازای $p>1$ همگراست.

۴۳. مطلوب است مساحت ناحیه.

حل $A = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

۴۴. مطلوب است مرکز جرم ناحیه.

حل $M = 1\ ,\quad M_y = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1\ ,$

$$M_x = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M},\frac{M_x}{M}\right) = \left(1,\frac{1}{4}\right)$$

۴۵. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه حول محور y.

حل $V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 2\pi$

۴۶. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x

حل $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

۴۷. مطلوب است مرکز جرم ناحیهٔ محدود به خمهای $y=\pm(1-x^2)^{-1/2}$ و خطوط $x=0$ و $x=1$

حل

$$M = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\lim_{b\to 1^-}\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_0^b = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$M_y = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -2\lim_{b\to 1^-}\sqrt{1-x^2}\Big]_0^b = 2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{\pi}$$

و بنا بر تقارن $\bar{y}=0$

۴۸. مطلوب است مساحت ناحیهٔ واقع در بین خمهای $y=\sec x$ و $y=\tan x$ به ازای $0\le x\le \pi/2$.

حل

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)\,dx$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}}\int_0^b(\sec x - \tan x)\,dx$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{Ln}\,|\sec x+\tan x| - \mathrm{Ln}\,|\sec x|\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sec x+\tan x}{\sec x}\right|\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}\,|1+\sin x|\Big]_0^b = \mathrm{Ln}\,2 - \mathrm{Ln}\,1 = \mathrm{Ln}\,2$$

۴۹. نشان دهید که مساحت ناحیهٔ بین خم $y=1/(1+x^2)$ و سراسر محور x برابر مساحت قرص واحد $x^2+y^2\le 1$ است.

حل

$$A = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_a^1 + \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_1^b$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

که مساحت دایره به شعاع ۱ است.

۹.۷ استفاده از جدولهای انتگرالها
Using Integral Tables

به کمک فرمولهای انتگرال موجود در انتهای این کتاب، انتگرالهای مسائل ۱-۱۶ را محاسبه کنید.

۱. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad,\quad a>0$$

حل فرمول ۱۴۰

۲. $\int x\,\mathrm{Cos}^{-1}x\,dx$

حل فرمول ۱۰۰

$$\int x^n\mathrm{Cos}^{-1}ax\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{Cos}^{-1}ax+\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\ ,\ n\neq-1$$

۳. $\int_6^9\frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

حل فرمول ۱۳

$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+c & b<0\\ \displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+c & b>0\end{cases}$$

۴. $\int_0^{1/2}x\tan^{-1}2x\,dx$

حل فرمول ۱۰۱، $n\neq-1$

$$\int x^n\tan^{-1}ax\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1}ax-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx$$

۵. $\int\frac{dx}{(9-x^2)^2}$

حل فرمول ۱۹

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^2}=\frac{x}{2a^2(a^2-x^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{a^2-x^2}$$

۶. $\int_4^{10}\frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}dx$

حل فرمول ۱۴

$$\int\frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$$

۷. $\int_3^{11}\frac{dx}{x^2\sqrt{7+x^2}}$

حل فرمول ۲۷

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$$

۸. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$

حل فرمول ۳۵

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$$

۹. $\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}dx$

حل فرمول ۴۲

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C$$

۱۰. $\int_{-\pi/12}^{\pi/4}\frac{dx}{5+4\mathrm{Sin}\,2x}$

حل فرمول ۷۰، $b^2>c^2$

$$\int\frac{dx}{b+c\mathrm{Sin}ax}=\frac{-2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)\right]+c$$

۱۱. $\int\frac{dx}{4+5\mathrm{Sin}\,2x}$

حل فرمول ۷۱ $b^2<c^2$

$$\int\frac{dx}{b+c\mathrm{Sin}ax}=\frac{-1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\mathrm{Ln}\left|\frac{c+b\mathrm{Sin}ax+\sqrt{c^2-b^2}\,\mathrm{Cos}ax}{b+c\mathrm{Sin}ax}\right|+c$$

۱۲. $\int_3^6\frac{x}{\sqrt{x-2}}dx$

(راهنمایی: در فرمول ۷ ضرورتی ندارد n عدد صحیح باشد.)

حل فرمول ۷، $n\neq-1,-2$

$$\int x(ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{n+2}-\frac{b}{n+1}\right]+c$$

۱۳. $\int x\sqrt{2x-3}\,dx$

حل فرمول ۷

۱۴. $\int\frac{\sqrt{3x-4}}{x}dx$

حل فرمول ۱۲

$$\int\frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx=2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

۱۵. $\int_0^{\infty}x^{10}e^{-x}\,dx$

حل فرمول ۱۳۹، $n>0$

$$\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx=\Gamma(n)=(n-1)!$$

۱۶. $\int_0^1 x^2\tan^{-1}x\,dx$

حل فرمول ۱۰۱

در مسائل ۱۷-۲۰، به کمک جانشینهای داده شده، انتگرال را به انتگرالی تبدیل کنید که بتوان آن را در جداول موجود در انتهای این کتاب یافت. سپس انتگرال را محاسبه کنید.

۱۷. $\int_0^1\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{x}\,dx\ ,\quad u=\sqrt{x}$

حل

$$u=\sqrt{x}\Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow du=\frac{1}{2u}dx$$

$$\Rightarrow\ dx=2u\,du\ \Rightarrow$$

$$\int_0^1\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 2u\,\mathrm{Sin}^{-1}u\,du$$

$$=2\left(\frac{u^2}{2}\mathrm{Sin}^{-1}u-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du\right)$$

$$=\left[u^2\mathrm{Sin}^{-1}u-\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sin}^{-1}u-u\sqrt{1-u^2}\right]\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

از فرمولهای ۹۹ و ۳۳ استفاده شده است.

۱۸. $\int_{3/4}^1\frac{\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx\ ,\quad u=\sqrt{x}$

حل

$$\begin{cases}u=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ 2u\,du=dx\\ x=1\Rightarrow u=1\ ,\ x=\frac{3}{4}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}2\cos^{-1}u\,du$$

$$=2\left[u\cos^{-1}u-\sqrt{1-u^2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

از فرمول ۹۷ استفاده شده است.

۱۹. $\int_{0}^{1/2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx,\quad u=\sqrt{x}$

حل

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2u^2}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$=2\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}u-\frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}\right]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$ (فرمول ۳۳)

۲۰. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot x\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx,\quad u=\sin x$

حل

$$\begin{cases}u=\sin x \Rightarrow du=\cos x\,dx\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}du$$

$$\overset{(31)}{=}\left[\sqrt{1-u^2}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$$

۲۱. مرکزوار ناحیه‌ای از ربع اول را بیابید که به خم $y=1/\sqrt{x+1}$ و خط $x=3$ محدود است.

حل

$$M=\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+1}\Big]_{0}^{3}=2$$

$$M_y=\int_{0}^{3}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx\overset{(7)}{=}\sqrt{x+1}\left(\frac{2}{3}(x+1)-2\right)\Big]_{0}^{3}=\frac{8}{3}$$

$$M_x=\int_{0}^{3}\frac{x}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}\frac{dx}{x+1}=\ln 2$$

$$\Rightarrow\quad(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{M}(M_y,M_x)=\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

۲۲. یک ورقهٔ نازک با چگالی ثابت $\delta=1$ ناحیه‌ای از ربع اول را که به خم $y=36/(2x+3)$ و خط $x=3$ محدود است اشغال می‌کند. مطلوب است گشتاوری که این ورقه حول محور y ایجاد می‌کند.

حل

$$M_y=\int_a^b xf(x)dx=\int_0^3\frac{36x}{2x+3}dx$$

فرمولهایی که در مسائل ۲۳-۲۶ به آنها اشاره شده است فرمولهای موجود در صفحات انتهای این کتاب‌اند.

۲۳. فرمول ۵۵ را با مشتقگیری از طرف راست ثابت کنید.

حل

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}\overset{?}{=}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}+c$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\right)=\frac{-1}{2a}\left(\frac{-x-(2a-x)}{x^2}\right)\left(\frac{2a-x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-1}{2a}\cdot\left(\frac{-2a}{x^2}\right)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}$$

۲۴. فرمول ۷۶ را با مشتقگیری از طرف راست ثابت کنید.

حل

$$\int\frac{dx}{1+\cos ax}\overset{?}{=}\frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}+c$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan\left(\frac{ax}{2}\right)+c\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{2}\right)\sec^2\frac{ax}{2}$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{ax}{2}}=\frac{1}{1+\cos ax}$$

۲۵. فرمول ۹ را با انتگرالگیری از

$$\int\frac{x}{(ax+b)^2}dx$$

و با جانشانی $u=ax+b$ ثابت کنید.

حل

$$\int x(ax+b)^{-2}dx\overset{?}{=}\frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right]+c$$

$$u=ax+b\Rightarrow dx=\frac{1}{a}du\Rightarrow$$

$$\int x(ax+b)^{-2}=\int\frac{u-b}{a}\cdot u^{-2}\frac{1}{a}du=\frac{1}{a^2}\int\frac{u-b}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{b}{u^2}\right)du=\frac{1}{a^2}\left[\ln|u|+\frac{b}{u}\right]+c$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b|-\frac{b}{ax+b}\right]+c$$

۲۶. فرمول ۴۶ را با انتگرالگیری از

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

و با جانشانی $x=a\sec u$ ثابت کنید.

حل

$$x=a\sec u\Rightarrow dx=a\sec u\tan u\,du\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec u\tan u\,du}{a^2\sec^2 u\sqrt{a^2(\sec^2 u-1)}}$$

$$=\int\frac{a\sec u.\tan u\,du}{a^3\sec^2 u.\tan u}=\frac{1}{a^2}\int\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{a^2}\sin u+c=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+c$$

۷.۱۰ فرمولهای کاهش توان

Reduction Formulas

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx\qquad(1)$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \qquad (۲)$$

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \qquad (۳)$$

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx \qquad (۴)$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2}x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \qquad (۵)$$

$$\int \csc^n x\,dx = -\frac{\csc^{n-2}x\cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\,dx \qquad (۶)$$

در مسائل ۱-۲۴، انتگرالها را به کمک فرمولهای کاهش توان این بخش محاسبه کنید.

۱. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x\,dx$

حل
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x\,dx = \frac{\cos^3 x\sin x}{4}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx$$
$$= 0 + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{3}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

بعلت سادگی عملیات در تمرینات آتی از آوردن جزئیات خودداری می‌گردد.

۲. $\int \cos^4 2x\,dx$

حل
$$\int \cos^4 2x\,dx = \frac{\cos^3 2x\sin 2x}{8} + \frac{3}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

۳. $\int \cos^6 x\,dx$

حل
$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{\cos^5 x\sin x}{6} + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,dx$$

۴. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^6 3x\,dx$

حل
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^6 3x\,dx = \frac{\cos^5 3x\sin 3x}{3\times 6}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{5}{6}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^4 3x\,dx$$

۵. $\int_{0}^{\pi} \sin^4 x\,dx$

حل
$$\int_{0}^{\pi} \sin^4 x\,dx = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4}\Big]_{0}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$= 0 + \frac{3}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{3}{8}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_{0}^{\pi} = \frac{3\pi}{8}$$

۶. $\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

حل
$$\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)dx = -\frac{2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

۷. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$

حل
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = -\frac{\sin^4 x\cos x}{5}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{5}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$$

۸. $\int_{0}^{\pi/4} \sin^5 2x\,dx$

حل
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 2x\,dx = -\frac{\sin^4 2x\cos 2x}{2(5)}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{5}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2x\,dx$$

۹. $\int \tan^3 2x\,dx$

حل
$$\int \tan^3 2x\,dx = \frac{\tan^2 2x}{2(2)} - \int \tan 2x\,dx$$
$$= \frac{\tan^2 2x}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|\cos 2x| + c$$

۱۰. $\int_{0}^{\pi/2} \tan^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

حل
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan^4\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{2\tan^3\frac{x}{2}}{3}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

۱۱. $\int \tan^5 x\,dx$

حل
$$\int \tan^5 x\,dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x\,dx$$

۱۲. $\int \tan^5 2x\,dx$

حل
$$\int \tan^5 2x\,dx = \frac{\tan^4 2x}{2(4)} - \int \tan^3 2x\,dx$$

۱۳. $\int \cot^3 x\,dx$

حل
$$\int \cot^3 x\,dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \int \cot x\,dx$$
$$= -\frac{\cot^2 x}{2} - \mathrm{Ln}\,|\sin x| + c$$

۱۴. $\int \cot^3\left(\frac{x}{3}\right)dx$

حل
$$\int \cot^3\left(\frac{x}{3}\right)dx = -\frac{3\cot^2 x}{2} - 3\mathrm{Ln}\left|\sin\frac{x}{3}\right| + c$$

۱۵. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot^4 x\,dx$

حل
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cot^4 x\,dx = -\frac{\cot^3 x}{3}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cot^2 x\,dx$$

۱۶. $\int \cot^4 2x\,dx$

حل
$$\int \cot^4 2x\,dx = -\frac{1}{6}\cot^3 2x - \int \cot^2 2x\,dx$$

۱۷. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec^4 x\,dx$

حل
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^4 x\,dx = \frac{\sec^2 x\tan x}{3}\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx$$
$$= \frac{\sec^2 x\tan x}{3}\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2}{3}\tan x\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

۱۸. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^4 4x\,dx$

حل
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 4x\,dx = \frac{\sec^2 4x\tan 4x}{3(4)}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 4x\,dx$$

۱۹. $\int \sec^5 x\,dx$

حل
$$\int \sec^5 x\,dx = \frac{\sec^3 x\tan x}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\,dx$$

۲۰. $\int \sec^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$

حل $\int \sec^5\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{2\sec^3\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$

۲۱. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^3 x\, dx$

حل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \csc^3 x\, dx = -\left.\frac{\csc x \cot x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \csc x\, dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\csc x \cot x + \mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$

۲۲. $\int_{\pi}^{3\pi} \csc^3\left(\frac{x}{3}\right)dx$

حل $\int_{\pi}^{3\pi} \csc^3\left(\frac{x}{3}\right)dx = \frac{-3\csc\left(\frac{x}{3}\right)\cot\left(\frac{x}{3}\right)}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{Ln}\left|\csc\frac{x}{3} + \cot\frac{x}{3}\right| + c$

۲۳. $\int \csc^4 x\, dx$

حل $\int \csc^4 x\, dx = -\frac{\csc^2 x \cot x}{2} + \frac{2}{3}\int \csc^2 x\, dx$

۲۴. $\int \csc^5 x\, dx$

حل $\int \csc^5 x\, dx = -\frac{\csc^3 x \cot x}{4} + \frac{3}{4}\int \csc^3 x\, dx$

برای محاسبهٔ انتگرالها در مسائل ۲۵-۲۸، از یک جانشانی مثلثاتی و یک فرمول کاهش توان استفاده کنید.

۲۵. $\int_0^1 (x^2+1)^{-3/2}\, dx$

حل
$$\begin{cases} x = \tan u \Rightarrow dx = \sec^2 u\, du \\ x = 0 \Rightarrow u = 0,\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$\int_0^1 (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 u}{(1+\tan^2 u)^{\frac{3}{2}}}du$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos u\, du = \left.\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۶. $\int_0^1 (x^2+1)^{3/2}\, dx$

حل $\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 u + 1)^{\frac{3}{2}}\sec^2 u\, du$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 u\, du = \left.\frac{\sec^3 u \tan u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u\, du$

$= \left[\frac{\sec^3 u \tan u}{4} + \frac{3}{8}\left(\sec u \tan u + \mathrm{Ln}\,|\sec u + \tan u|\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

۲۷. $\int_0^{3/5} \frac{dx}{(1-x^2)^3}$

حل
$$\begin{cases} x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u\, du \\ x = 0 \Rightarrow u = 0,\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow u = \sin^{-1}\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)} \frac{\cos u\, du}{(1-\sin^2 u)^3}$

$= \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)} \sec^5 u\, du = \frac{1}{4}\left[\sec^3 u \tan u + \frac{3}{2}\right.$

$\left.\left(\sec u \tan u + \mathrm{Ln}\,|\sec u + \tan u|\right)\right]_0^{\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)}$

۲۸. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^{3/2}}{x}dx$

حل
$$\begin{cases} x = \sec u \Rightarrow dx = \sec u \tan u\, du \\ x = 1 \Rightarrow u = 0,\ x = 2 \Rightarrow u = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\int_1^2 \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sec^2 u - 1)^{\frac{3}{2}}\sec u \tan u}{\sec u}du$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 u\, du = \left.\frac{1}{3}\tan^3 u - \tan u + u\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

۲۹. فرمول

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\, dx$$

را به این ترتیب ثابت کنید که از طرف راست آن مشتق بگیرید و نتایج را ترکیب کنید تا $\sin^n x$ به دست آید.

حل $\frac{d}{dx}\left[\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\, dx\right] = \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}x \quad (*)$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{-\sin^{n-1}\cos x}{n}\right] =$

$-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x(-\sin x) - \left(\frac{n-1}{n}\right)(\cos x)(\sin^{n-2}x)(\cos x)$

$= \frac{1}{n}\sin^n x - \frac{n-1}{n}\cos^2 x \sin^{n-2}x \quad (**)$

$(*)+(**) = \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}x + \frac{1}{n}\sin^n x - \frac{n-1}{n}\cos^2 x \sin^{n-2}x$

$= \frac{1}{n}\sin^n x + \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)$

$= \frac{1}{n}\sin^n x + \frac{n-1}{n}\sin^n x = \frac{n-1+1}{n}\sin^n x = \sin^n x$

۳۰. فرمول

$$\int \csc^n x\, dx = -\frac{\csc^{n-2}x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\, dx$$

را به این ترتیب ثابت کنید که از طرف راست آن مشتق بگیرید و نتایج را ترکیب کنید تا $\csc^n x$ به دست آید.

حل ساده و به عهده دانشجو

۳۱. الف) فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx.$$

ب) فرمول نظیر برای $x^n \sin ax$ چیست؟

حل
$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} \\ dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow$$

a) $\int x^n \operatorname{Sin}x\,dx = -x^n \operatorname{Cos}x + n\int x^{n-1}\operatorname{Cos}x\,dx$

b) $\int x^n \operatorname{Sin}ax\,dx = -\frac{x^n \operatorname{Cos}ax}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{Cos}ax\,dx$

۳۲. الف) فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^n \operatorname{Cos}x\,dx = x^n \operatorname{Sin}x - n\int x^{n-1}\operatorname{Sin}x\,dx.$$

ب) فرمول نظیر برای $x^n\operatorname{Cos}ax$ چیست؟

حل

$$\begin{cases} u=x^n \Rightarrow du=nx^{n-1}dx \\ dv=\operatorname{Cos}x\,dx \Rightarrow v=\operatorname{Sin}x \end{cases} \Rightarrow$$

a) $\int x^n \operatorname{Cos}x\,dx = x^n \operatorname{Sin}x - n\int x^{n-1}\operatorname{Sin}x\,dx$

b) $\int x^n \operatorname{Cos}ax\,dx = \frac{x^n \operatorname{Sin}ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{Sin}ax\,dx$

۳۳. فرمول زیر را به دست آورید.

$$\int x^m(\operatorname{Ln}x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\operatorname{Ln}x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\operatorname{Ln}x)^{n-1}dx$$

از این فرمول استفاده کنید و انتگرل زیر را محاسبه کنید.

$$\int_1^3 x^3(\operatorname{Ln}x)^2 dx$$

حل

$$\begin{cases} u=(\operatorname{Ln}x)^n \Rightarrow du=\frac{n(\operatorname{Ln}x)^{n-1}}{x}dx \\ dv=x^m dx \Rightarrow v=\frac{x^{m+1}}{m+1} \end{cases} \Rightarrow$$

a) $\int x^m(\operatorname{Ln}x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\operatorname{Ln}x)^n - \frac{n}{m+1}\int\frac{x^{m+1}}{x}(\operatorname{Ln}x)^{n-1}dx$

$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\operatorname{Ln}x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(\operatorname{Ln}x)^{n-1}dx$

b) $\int_1^e x^3(\operatorname{Ln}x)^2 dx = \frac{x^4(\operatorname{Ln}x)^2}{4}\Big]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^3\operatorname{Ln}x\,dx$

$= \frac{x^4(\operatorname{Ln}x)^2}{4}\Big]_1^e - \frac{1}{8}x^4\operatorname{Ln}x\Big]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3dx$

$= \frac{1}{4}\left[x^4(\operatorname{Ln}x)^2 - \frac{x^4}{2}\operatorname{Ln}x - \frac{x^4}{4}\right]_1^e = \frac{e^4-1}{16}$

۳۴. فرمول زیر را به دست آورید

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

از این فرمول استفاده کنید و انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 x^3 e^x\,dx$$

حل

$$\begin{cases} u=x^n \Rightarrow du=nx^{n-1}dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int e^x x^{n-1}dx$$

مسأله‌های گوناگون Miscellaneous problems

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱. $\int\frac{\operatorname{Cos}x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{Sin}x}}$

حل راهنمایی: فرض کنید $u=\operatorname{Sin}x$

۲. $\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{\operatorname{Sin}^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

حل

$$\begin{cases} u=\operatorname{Sin}^{-1}x \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ x=0 \Rightarrow u=0;\ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\operatorname{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\,du = \frac{1}{2}u^2\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

۳. $\int\frac{\tan x\,dx}{\operatorname{Cos}^2 x}$

حل $\int\frac{\tan x}{\operatorname{Cos}^2 x}dx = \int \tan x\sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$

۴. $\int\frac{y}{y^4+1}dy$

حل $\int\frac{y}{y^4+1}dy = \frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+(y^2)^2}dy = \frac{1}{2}\tan^{-1}y^2 + c$

۵. $\int_0^9 e^{\operatorname{Ln}\sqrt{x}}dx$

حل $\int_0^9 e^{\operatorname{Ln}\sqrt{x}}dx = \int_0^9\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big]_0^9 = 18$

۶. $\int\frac{\operatorname{Cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

حل راهنمایی: $u=\sqrt{x}$

۷. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

حل $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int\frac{\sec^2 u\,du}{\sqrt{\tan^2 u+1}}$

$= \int\frac{\sec^2 u}{\sec u}du = \int\sec u\,du = \operatorname{Ln}|\sec u+\tan u| + c$

$= \operatorname{Ln}\left|\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right| + c$ فرض کردیم $x+1=\tan u$

۸. $\int_4^5\frac{(3x-7)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

حل

$$\frac{3x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

$$\int_{0}^{64}\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\int_{1}^{3}\frac{4u(u^2-1)}{u}du$$

$$=4\left[\frac{u^3}{3}-u\right]_1^3=\frac{4}{3}\left[u^3-3u\right]_1^3=\frac{80}{3}$$

۱۵. $\int t^{2/3}(t^{5/3}+1)^{2/3}dt$

حل

$$u=t^{\frac{5}{3}}+1\Rightarrow du=\frac{5}{3}t^{\frac{2}{3}}dt$$

$$\int t^{\frac{2}{3}}\left(t^{\frac{5}{3}}+1\right)^{\frac{2}{3}}dt=\int\frac{3}{5}u^{\frac{2}{3}}du=\frac{9}{25}u^{\frac{5}{3}}+c$$

۱۶. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cot x\,dx}{\mathrm{Ln}(e\sin x)}$

حل

$$u=\mathrm{Ln}(e\sin x)\Rightarrow du=\frac{e\cos x}{e\sin x}=\cot x\Rightarrow$$

$$\int\frac{\cot x\,dx}{\mathrm{Ln}(e\sin x)}=\int\frac{du}{u}=\mathrm{Ln}u+c=\mathrm{Ln}\left(\mathrm{Ln}(e\sin x)\right)+c$$

$$\Rightarrow I=\mathrm{Ln}\left|\mathrm{Ln}(e\sin x)\right|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{Ln}\left|\mathrm{Ln}(e\sin\frac{\pi}{2})\right|$$

$$-\mathrm{Ln}\left|\mathrm{Ln}e\sin(\frac{\pi}{6})\right|=\mathrm{Ln}e-\mathrm{Ln}\frac{e}{2}=\mathrm{Ln}2$$

۱۷. $\int\frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$

حل

$$u^2=e^t+1\Rightarrow 2udu=e^tdt\Rightarrow\frac{2udu}{u^2-1}=dt\Rightarrow$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}=\int\frac{2udu}{(u^2-1)u}=2\int\frac{du}{u^2-1}$$

$$=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\mathrm{Ln}|u-1|-\mathrm{Ln}|u+1|+c$$

$$=\mathrm{Ln}\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{e^t+1}-1}{\sqrt{e^t+1}+1}\right|+c$$

۱۸. $\int\frac{\sin x\,e^{\sec x}}{\cos^2 x}dx$

حل

$$u=\sec x\Rightarrow\sec x\tan x\,dx=du\Rightarrow$$

$$\int\frac{\sin x\,e^{\sec x}}{\cos^2 x}dx=\int\tan x.\sec x\,e^{\sec x}dx=e^{\sec x}+c$$

۱۹. $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$

حل

$$u=\sin x\Rightarrow du=\cos x\,dx\Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}=\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A=-2,\ B=C=1\Rightarrow$$

$$\int_4^5\frac{(3x-7)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\int_4^5\left(\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$=\left(-2\mathrm{Ln}|x-1|+\mathrm{Ln}|x-2|+\mathrm{Ln}|x-3|\right)\Big]_4^5$$

$$=\mathrm{Ln}\left|\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)^2}\right|\Big]_4^5=\mathrm{Ln}\left|\frac{6}{16}\right|-\mathrm{Ln}\left|\frac{2}{9}\right|$$

۹. $\int x^2e^x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2	+	e^x
$2x$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x+c$$

۱۰. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$

حل

$$x=\tan u\Rightarrow dx=\sec^2 u\,du$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{\tan^2u+1}\,\sec^2u\,du$$

$$=\int\sec^3u\,du=\frac{1}{2}(\sec u\tan u+\mathrm{Ln}|\sec u+\tan u|)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\mathrm{Ln}\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)+c$$

۱۱. $\int\frac{e^t dt}{1+e^{2t}}$

حل راهنمایی: $u=e^t$

۱۲. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

حل

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\tan^{-1}e^x+c$$

۱۳. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

حل

$$u^2=x\Rightarrow 2udu=dx\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int\frac{2udu}{(u^2+1)u}=2\int\frac{du}{1+u^2}=2\tan^{-1}u+c$$

۱۴. $\int_0^{64}\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

حل

$$\begin{cases}u^2=1+\sqrt{x}\Rightarrow 2udu=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\Rightarrow 4u(u^2-1)du=dx\\ x=0\Rightarrow u=1\,;\,x=64\Rightarrow u=3\end{cases}\Rightarrow$$

۲۰. $\int_{\frac{1}{2}}^{(1+\sqrt{2})/2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

حل

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=\operatorname{Sin}^{-1}(x-1)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)} = \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) - \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

۲۱. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin}x\,dx}{1+\operatorname{Cos}^2 x}$

حل راهنمایی: $u=\operatorname{Cos}x$

۲۲. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{Cos}2t}{1+\operatorname{Sin}2t}dt$

حل راهنمایی: $u=\operatorname{Sin}2t$

۲۳. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}$

حل

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x} = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{Sin}2x} = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc 2x\,dx$$

$$=-\operatorname{Ln}|\csc 2x+\cot 2x|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{Ln}\sqrt{3}$$

۲۴. $\int \sqrt{1+\operatorname{Sin}x}\,dx$

حل

$$\int\sqrt{1+\operatorname{Sin}x}\,dx = \int\frac{\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 x}}{\sqrt{1-\operatorname{Sin}x}}dx = \int\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{1-\operatorname{Sin}x}}dx$$

$$=-2\sqrt{1-\operatorname{Sin}x}+c$$

۲۵. $\int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{1-\operatorname{Sin}x}\,dx$

حل

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\operatorname{Sin}x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 x}}{\sqrt{1+\operatorname{Sin}x}}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{1+\operatorname{Sin}x}}dx = 2\sqrt{1+\operatorname{Sin}x}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2$$

۲۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

حل

$x=a\tan u \Rightarrow dx=a\sec^2 u\,du \Rightarrow$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = \int\frac{a\sec^2 u\,du}{\sqrt{\left[a^2(1+\tan^2 u)\right]^3}}$$

$$=\int\frac{a\sec^2 u}{a^3\sec^3 u}du = \frac{1}{a^2}\int\operatorname{Cos}u\,du = \frac{1}{a^2}\operatorname{Sin}u+c$$

$$=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+c$$

۲۷. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{1+e^x}}$

حل

$u^3=1+e^x \Rightarrow 3u^2du=e^x dx \Rightarrow$

$$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{1+e^x}} = \int\frac{e^x e^x dx}{\sqrt[3]{1+e^x}} = \int\frac{(u^3-1)3u^2du}{u}$$

$$=3\int(u^4-u)du = \frac{3}{5}u^5-\frac{3}{2}u^2+c$$

$$=\frac{3}{5}(1+e^x)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(1+e^x)^{\frac{2}{3}}+c$$

۲۸. $\int_0^1 \operatorname{Ln}\sqrt{1+x^2}\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=\operatorname{Ln}(1+x^2)\Rightarrow du=\frac{2x\,dx}{1+x^2}\Rightarrow \\ dx=dv\Rightarrow x=v \end{cases}$$

$$\int_0^1 \operatorname{Ln}\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \operatorname{Ln}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{Ln}(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x\operatorname{Ln}(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x\operatorname{Ln}(1+x^2)-x+\tan^{-1}x\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}2-1+\frac{\pi}{4}$$

۲۹. $\int_{5/4}^{5/3} \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

حل

$x=\sec u \Rightarrow dx=\sec u\tan u\,du \Rightarrow$

$$=\int\frac{\sec u.\tan u}{\tan^3 u}du = \int\frac{\operatorname{Cos}u}{\operatorname{Sin}^2 u}du$$

$$=\frac{-1}{\operatorname{Sin}u}+c = \int\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}+c \Rightarrow I=\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\Big]_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{12}$$

۳۰. $\int_0^{3/5} \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$

حل

$$\begin{cases} x=\operatorname{Sin}u\Rightarrow dx=\operatorname{Cos}u\,du \\ x=0\Rightarrow u=0, x=\frac{3}{5}\Rightarrow u=\operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\Rightarrow \end{cases}$$

$$\int_{0}^{\frac{3}{5}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{0}^{\sin^{-1}(\frac{3}{5})} \frac{\sin^3 u \cos u}{\cos u}du$$

$$= -\cos u + \frac{\cos^3 u}{3}\Big]_{0}^{\sin^{-1}(\frac{3}{5})} = -\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 1 - \frac{1}{3}$$

۳۱. $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$

حل

$$u = 2+\ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x(2+\ln x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|2+\ln x| + c$$

۳۲. $\int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}dx$

حل

$$\int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = -\int \cot^2 x\,dx$$

$$= \int (1-\csc^2 x)dx = x + \cot x + c$$

۳۳. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{e^x+1}}$

حل

$$\begin{cases} u^3 = e^x + 1 \Rightarrow 4u^3 du = e^x dx \\ x = 0 \Rightarrow u = \sqrt[3]{2},\ x = \ln 2 \Rightarrow u = \sqrt[3]{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{e^x+1}} = \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{(u^4-1)4u^3}{u}du$$

$$= 4\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} (u^6 - u^2)\,du = 4\left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}$$

۳۴. $\int \frac{2\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}$

حل

$$\int \frac{2\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}dx = \int \frac{2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \int \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = -\cos 2\sqrt{x} + c$$

۳۵. $\int_{0}^{3} (16+x^2)^{-3/2}dx$

حل

$$\begin{cases} x = 4\tan u \Rightarrow dx = 4\sec^2 u\,du \\ x = 0 \Rightarrow u = 0;\ x = 3 \Rightarrow u = \tan^{-1}\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{3} (16+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \int_{0}^{\tan^{-1}(\frac{3}{4})} \frac{4\sec^2 u\,du}{64\sqrt{(1+\tan^2 x)^3}}$$

$$= \frac{1}{16}\int_{0}^{\tan^{-1}(\frac{3}{4})} \frac{\sec^2 u}{\sec^3 u}du = \frac{1}{16}\sin u\Big]_{0}^{\tan^{-1}(\frac{3}{4})} = \frac{3}{80}$$

۳۶. $\int_{0}^{(e-1)^2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

حل

$$\int_{0}^{(e-1)^2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\Big]_{0}^{(e-1)^2}$$

۳۷. $\int \sin\sqrt{x+1}\,dx$

حل

$$u^2 = x+1 \Rightarrow 2u\,du = dx \Rightarrow$$

$$\int \sin\sqrt{x+1}\,dx = \int 2u\sin u\,du = -2u\cos u + 2\sin u + c$$

$$= -2\sqrt{x+1}\cos\sqrt{x+1} + 2\sin\sqrt{x+1} + c$$

۳۸. $\int \cos\sqrt{1-x}\,dx$

حل راهنمایی: $u^2 = 1-x$

۳۹. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{4-x^2}$

حل

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4}\ln 3$$

۴۰. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3+1}$

حل

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int_{0}^{1} \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{-dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1|\Big]_{0}^{1} - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|\Big]_{0}^{1}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{-dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}(0) + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

برای انتگرال آخری از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌گردد:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\,du \\ x = 0 \Rightarrow u = \frac{-\pi}{3};\ x = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} = u \end{cases}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u}{\frac{3}{4}\sec^2 u}du=\frac{2}{\sqrt{3}}u\Big]_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\Rightarrow I=\frac{1}{3}Ln2+\frac{1}{2}(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}})=\frac{1}{3}Ln2+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

۴۱. $\int\frac{dy}{y(2y^3+1)^2}$

حل

$$\frac{1}{y(2y^3+1)^2}=\frac{A}{y}+\frac{By^2+Cy+D}{2y^3+1}+\frac{Ey^2+Fy+G}{(2y^3+1)^2}\Rightarrow$$

$$1\equiv A(2y^3+1)^2+(By^2+Cy+D)(2y^3+1)y$$

$$+(Ey^2+Fy+G)y\Rightarrow 1\equiv(4A+2B)y^6+2Cy^5+2Dy^4$$

$$+(4A+B+E)y^3+(C+F)y^2+(D+G)y+A$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4A+2B=0\\2C=0,2D=0\\4A+B+E=0\\C+F=0,D+G=0,A=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}C=D=F=G=0\\E=-2\\B=-2\\A=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y(2y^3+1)^2}=\int\left(\frac{1}{y}-\frac{2y^2}{2y^3+1}-\frac{y^2}{(2y^3+1)^2}\right)dy$$

$$=Ln|y|-\frac{1}{3}Ln|2y^3+1|+\frac{1}{3(2y^3+1)}+c$$

۴۲. $\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

حل راهنمایی: $u^2=x$

۴۳. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

حل راهنمایی: $x=\tan u$

۴۴. $\int Ln\sqrt{x-1}\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=Ln(x-1)\Rightarrow du=\frac{dx}{x-1}\Rightarrow\\dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$$

$$\int Ln\sqrt{x-1}\,dx=\int Ln\left(x-1\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int Ln(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[xLn|x-1|-\int\frac{x\,dx}{x-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}xLn|x-1|-x-Ln|x-1|+c$$

۴۵. $\int\frac{dx}{e^x-1}$

حل

$$e^x=u\Rightarrow e^x dx=du\Rightarrow dx=\frac{du}{u}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{e^x-1}=\int\frac{du}{u(u-1)}=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=Ln|u-1|-Ln|u|+c=Ln|\frac{u-1}{u}|+c=Ln|\frac{e^x-1}{e^x}|+c$$

۴۶. $\int\frac{(x+1)dx}{x^2(x-1)}$

حل

$$\frac{(x+1)}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}-\frac{C}{x-1}\Rightarrow A=-2,\ B=-2,\ C=-2\Rightarrow$$

$$\int\frac{(x+1)}{x^2(x-1)}dx=-2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$=-2Ln|x|+\frac{1}{x}+2Ln|x-1|+c$$

۴۷. $\int\frac{x\,dx}{x^2+4x+3}$

حل

$$\frac{x}{x^2+4x+3}=\frac{x}{(x+3)(x+1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+1)}\Rightarrow A=\frac{3}{2},B=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{3}{2}Ln|x+3|-\frac{1}{2}Ln|x+1|+C$$

۴۸. $\int_{Ln2}^{Ln3}\frac{15du}{(e^u-e^{-u})^2}$

حل

$$\int_{Ln2}^{Ln3}\frac{15du}{(e^u-e^{-u})^2}=\int_{Ln2}^{Ln3}\frac{15e^{2u}}{(e^{2u}-1)^2}du$$

$$=\frac{-15}{2(e^{2u}-1)}\Big]_{Ln2}^{Ln3}=\frac{75}{48}$$

۴۹. $\int\frac{4dx}{x^3+4x}$

حل

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\Rightarrow A=1,B=-1,c=0\Rightarrow$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx=Ln|x|-\frac{1}{2}Ln(x^2+4)+c$$

۵۰. $\int\frac{dx}{5x^2+8x+5}$

حل

$$\int\frac{dx}{5x^2+8x+5}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+\frac{8}{5}x+1}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{3}{5}\sec^2 u\,du}{\frac{9}{25}\left[1+\tan^2 u\right]}=\frac{1}{3}\int\frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du=\frac{1}{3}u+c$$

$$=\frac{1}{3}\tan^{-1}(\frac{5x+4}{3})+c$$

توجه شود تغییر متغیر $x+\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\tan u$ را انجام دادیم.

۵۱. $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

حل

$$x=\sec u\Rightarrow dx=\sec u.\tan u\,du\Rightarrow$$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\int\frac{\tan u.\sec u.\tan u}{\sec u}du$$

$$= \int \tan^2 u\,du = \int (\sec^2 u - 1)\,du = \tan u - u + c$$
$$= \sqrt{x^2-1} - \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + c$$

۵۲. $\int e^x \cos 2x\,dx$

حل حالت کلی $\int e^{ax}\cos bx\,dx = ?\ (a,b \neq 0)$

$$\begin{cases} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx \\ dv = \cos bx\,dx \Rightarrow v = \dfrac{\sin bx}{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\underbrace{\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{(*)} \quad (I)$$

$$(*):\ \begin{cases} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx \\ dv = \sin bx\,dx \Rightarrow v = \dfrac{-\cos bx}{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}e^{ax}\cos bx\,dx \quad (I')$$

با جایگذاری رابطه (I') در (I) داریم

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$\Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{b^2}e^{ax}$$
$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$$

تمرین: فرمول زیر را بدست آورید

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$$

در این تمرین (۵۲)، $a=1$ و $b=2$ است پس

$$\int e^{ax}\cos 2x\,dx = \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{1+4}e^x + c$$

۵۳. $\int \dfrac{dx}{x(3\sqrt{x}+1)}$

حل $u^2 = x \Rightarrow 2u\,du = dx \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x}+1)} = \int \frac{2u\,du}{u^2(3u+1)} = 2\int \frac{du}{u(3u+1)}$$
$$= \int \frac{2du}{u} - \int \frac{6du}{3u+1} = 2\ln u - 2\ln(3u+1) + c$$

۵۴. $\int \dfrac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$

حل $u^3 = x \Rightarrow 3u^2du = dx \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{3u^2du}{u^3(1+u)} = \int \frac{3du}{u(1+u)}$$
$$= 3\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = 3\ln|u| - 3|1+u| + c$$

۵۵. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{\cot\theta\,d\theta}{1+\sin^2\theta}$

حل $\sin\theta = \tan u \Rightarrow \cos\theta\,d\theta = \sec^2 u\,du \Rightarrow$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta(1+\sin^2\theta)}$$
$$= \int_{\tan^{-1}(\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 u}{\tan u.\sec^2 u}du = \int_{\tan^{-1}(\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{4}} \cot u\,du$$
$$= \ln|\sin u|\Big]_{\tan^{-1}(\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

۵۶. $\dfrac{z^5dz}{\sqrt{1+z^2}}$

حل $z = \tan u \Rightarrow dz = \sec^2 u\,du \Rightarrow$

$$\int \frac{z^5}{\sqrt{1+z^2}}dz = \int \frac{\tan^5 u}{\sec u}.\sec^2 u\,du = \int \tan^5 u \sec u\,du$$
$$= \int \tan^4 u.\sec u.\tan u\,du = \int (\sec^2 u - 1)^2 \sec u \tan u\,du$$
$$= \int (w^2-1)^2 dw = \frac{1}{5}w^5 - \frac{2}{3}w^3 + w + c$$
$$= \frac{1}{5}(1+z^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+z^2)^{\frac{3}{2}} + (1+z^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

۵۷. $\int \dfrac{e^{4t}dt}{(1+e^{2t})^{2/3}}$

حل $1+e^{2t} = u^3 \Rightarrow 2e^{2t}dt = 3u^2du \Rightarrow$

$$\int \frac{e^{4t}dt}{(1+e^{2t})^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2}\int \frac{(u^3-1)u^2du}{u^2} = \frac{3}{2}\int (u^3-1)du$$
$$= \frac{3}{8}u^4 - \frac{3}{2}u + c = \frac{3}{8}(1+e^{2t})^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}(1+e^{2t})^{\frac{1}{3}} + c$$

۵۸. $\int \dfrac{dx}{x^{1/5}\sqrt{1+x^{4/5}}}$

حل راهنمایی $u = 1 + x^{\frac{4}{5}}$

۵۹. $\int \dfrac{(x^3+x^2)dx}{x^2+x-2}$

حل راهنمایی: $\dfrac{x^3+x^2}{x^2+x-2} = x + \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(x+2)} + \dfrac{2}{3(x-1)}$

۶۰. $\int^3 \dfrac{x^3+1}{x^3-x}dx$

حل راهنمایی: $\dfrac{x^3+1}{x^3-x} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-1}$

۶۱. $\int \dfrac{x\,dx}{(x-1)^2}$

حل راهنمایی: $\dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

۶۲. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x-3)^{2/3}}$

حل راهنمایی: $u=x^2+2x-3$

۶۳. $\int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{y^2+y}}$

حل

$$\int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{y^2+y}} = \int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec u\tan u}{\sec u\sqrt{\frac{1}{4}(\sec^2 u-1)}} = \int du = u+c = \sec^{-1}(2y+1)+c$$

توجه کنید تغیر متغیر $\frac{1}{2}\sec u = y+\frac{1}{2}$ انجام گرفت.

۶۴. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

حل $x=a\sin u \Rightarrow dx=a\cos u\,du \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos u\,du}{a^2\sin^2 u\sqrt{a^2(1-\sin^2 u)}}$$

$$= \int \frac{a\cos u\,du}{a^2\sin^2 u.a\cos u}du = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{\sin^2 u} = \frac{-1}{a^2}\cot u+c$$

$$= \frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+c$$

۶۵. $\int (1-x^2)^{3/2}dx$

حل $x=\sin u \Rightarrow dx=\cos u\,du \Rightarrow$

$$\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \int (1-\sin^2 u)^{\frac{3}{2}}\cos u\,du = \int \cos^4 u\,du$$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2 du = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2u+\cos^2 2u)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2u+\frac{1+\cos 4u}{2}\right)du$$

$$= \frac{3}{8}u+\frac{1}{4}\sin 2u+\frac{1}{32}\sin 4u = \frac{3}{8}u+\frac{1}{2}\sin u\cos u+\frac{1}{16}$$

$$\sin 2u\cos 2u = \frac{3}{8}u+\frac{1}{2}\sin u\cos u+\frac{1}{8}\sin u\cos u(\cos^2 u-\sin^2 u$$

$$= \frac{3}{8}\sin^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)+c$$

۶۶. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$$

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}+c$$

۶۷. $\int x\tan^2 x\,dx$

حل

$$\int x\tan^2 x\,dx = \int x(\sec^2 x-1)dx = \int x\sec^2 x\,dx - \int x\,dx$$

$$= x\tan x+\ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2+c$$

برای انتگرال اول جزء به جزء استفاده شده است.

۶۸. $\int x\cos^2 x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x	$\times$	$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$
1	$-$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$
0		$\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x)$

$$\Rightarrow \int x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}\cos 2x+c$$

۶۹. $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2	$+$	$\sin x$
$2x$	$-$	$-\cos x$
2	$+$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$\Rightarrow I=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$$

$$\Rightarrow I\Big]_0^{\pi} = -x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\Big]_0^{\pi} = \pi^2-4$$

۷۰. $\int x\sin^2 x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x	$+$	$\sin x=\frac{1-\cos 2x}{2}$
1	$-$	$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)$
0		$\frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2}\cos 2x)$

$$\Rightarrow I=\frac{x}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+c$$

۷۱. $\int_0^1 \frac{dt}{t^4+4t^2+3}$

حل

$$\frac{1}{t^4+2t^2+3} = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+3}$$

$$\Rightarrow 1\equiv(A+C)t^3+(B+D)t^2+(3A+C)t+(3B+D) \Rightarrow B=\frac{1}{2},$$

$$D=\frac{-1}{2}, A=C=0 \Rightarrow$$

$$=x\sec^{-1}x-\int\frac{\sec u\tan u}{\tan u}du=x\sec^{-1}x-\mathrm{Ln}\,|\sec^{-1}u+\tan u|+c$$

$$=x\sec^{-1}x-\mathrm{Ln}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$$

۷۶. $\int\frac{8dx}{x^4+2x^3}$

حل

$$\frac{8}{x^4+2x^3}=\frac{8}{x^3(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x+2}$$

$\Rightarrow A=1,\ B=-2,\ C=4,\ D=0,\ E=-1\Rightarrow$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\mathrm{Ln}\,|x|+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\mathrm{Ln}\,|x+2|+c$$

۷۷. $\int\frac{x\,dx}{x^4-16}$

حل

$$\frac{x}{x^4-16}=\frac{x}{(x^2-4)(x^2+4)}=\frac{x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\Rightarrow x\equiv(A+B+C)x^3+4(2A-2B+D)x^2$$

$$+4(A+B-C)x+4(2A-2B-D)\Rightarrow A=B=\frac{1}{16},C=\frac{-1}{8},\ D=0\Rightarrow$$

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-16}=\int\left(\frac{1}{16(x-2)}+\frac{1}{16(x+2)}-\frac{x}{8(x^2+4)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{16}\mathrm{Ln}\,|x-2|+\frac{1}{16}\mathrm{Ln}\,|x+2|-\frac{1}{16}\mathrm{Ln}(x^2+4)+c$$

$$=\frac{1}{16}\mathrm{Ln}\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right|+c$$

۷۸. $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}$

حل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}\sec(\frac{x}{2})\right)dx$$

$$=2\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2})-\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\left|\sec(\frac{x}{2})+\tan(\frac{x}{2})\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2-\sqrt{2}\mathrm{Ln}(\sqrt{2}+1)$$

۷۹. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3x-\sin x}$

حل

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3x-\sin x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x(\sin^2x-1)}=-\int\frac{\cos x}{\sin x\cos^2x}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=-\int\frac{2dx}{\sin 2x}=-2\int\csc 2x\,dx$$

$$=2\mathrm{Ln}\,|\csc 2x+\cot 2x|+c$$

۸۰. $\int_0^{\mathrm{Ln}\,2}\frac{du}{(e^u+e^{-u})^2}$

حل

$$\begin{cases}x=e^u\Rightarrow dx=e^u du\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ u=0\Rightarrow x=1;\ u=\mathrm{Ln}\,2\Rightarrow x=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_0^1\frac{dt}{t^4+4t^2+3}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}t-\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big]_0^1=\frac{(9-2\sqrt{3})\pi}{72}$$

۷۲. $\int\frac{du}{e^{4u}+4e^{2u}+3}$

حل

$$x=e^{2u}\Rightarrow dx=2e^{2u}du\Rightarrow du=\frac{dx}{2x}\Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{e^{4u}+4e^{2u}+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x^2+4x+3)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{3x}+\frac{-1}{2(x-1)}+\frac{1}{6(x+3)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\,|x|-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\,|x+1|+\frac{1}{12}\mathrm{Ln}\,|x+3|+c$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\,|e^{2u}|-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\,|e^{2u}+1|+\frac{1}{12}\mathrm{Ln}\,|e^{2u}+3|+c$$

۷۳. $\int_0^2 x\,\mathrm{Ln}\sqrt{x+2}\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=\mathrm{Ln}(x+2)\Rightarrow du=\frac{dx}{x+2}\\ dv=x\,dx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_0^2 x\,\mathrm{Ln}\sqrt{x+2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{Ln}(x+2)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\mathrm{Ln}(x+2)\Big]_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2\frac{x^2}{x+2}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2\mathrm{Ln}(x+2)-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}-\mathrm{Ln}\,|x+2|\Big]_0^2=\mathrm{Ln}\,2+\frac{1}{2}$$

۷۴. $\int(x+1)^2e^x\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
$(x+1)^2$	+	e^x
$2(x+1)$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow I=e^x[(x+1)^2-2(x+1)+2]+c=e^x[x^2+1]+c$$

۷۵. $\int\sec^{-1}x\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=\sec^{-1}x\Rightarrow du=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int\sec^{-1}x\,dx=x\sec^{-1}x-\int\frac{x\,dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\int_{0}^{\operatorname{Ln}2}\frac{du}{(e^{u}+e^{-u})^{2}}=\int_{1}^{2}\frac{\frac{dx}{x}}{(x+\frac{1}{x})^{2}}=\int_{1}^{2}\frac{xdx}{(x^{2}+1)^{2}}$$

$$=\left.\frac{-1}{2(x^{2}+1)}\right]_{1}^{2}=\frac{3}{20}$$

۸۱. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}+x}$

حل

$$\begin{cases}x=u^{2}\Rightarrow dx=2udu\\ x=0\Rightarrow u=0;x=1\Rightarrow u=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}+x}=\int_{0}^{1}\frac{u^{2}(2udu)}{u^{2}+u+1}$$

$$=2\int_{0}^{1}\left(u-1+\frac{1}{u^{2}+u+1}\right)du=\left.u^{2}-2u\right]_{0}^{1}$$

$$+\int_{0}^{1}\frac{du}{(u+\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}}=u^{2}-2u+\frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{3}-9}{9}$$

۸۲. $\int\frac{\sec^{2}tdt}{\sec^{2}t-3\tan t+1}$

حل

$u=\tan t\Rightarrow du=\sec^{2}tdt\Rightarrow$

$$\int\frac{\sec^{2}tdt}{\sec^{2}t-3\tan t+1}=\int\frac{\sec^{2}tdt}{(\tan^{2}t+1)-3\tan t+1}$$

$$=\int\frac{\sec^{2}tdt}{\tan^{2}t-3\tan t+2}=\int\frac{du}{u^{2}-3u+2}$$

$$=\int\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u-1}\right)du=\operatorname{Ln}|u-2|-\operatorname{Ln}|u-1|+c$$

$$=\operatorname{Ln}\left|\frac{u-2}{u-1}\right|+c=\operatorname{Ln}\left|\frac{\tan t-2}{\tan t-1}\right|+c$$

۸۳. $\int\frac{dt}{\sec^{2}t+\tan^{2}t}$

حل

$u=\tan t\Rightarrow du=\sec^{2}tdt\Rightarrow$

$$\int\frac{dt}{\sec^{2}t+\tan^{2}t}=\int\frac{dt}{\tan^{2}t+1+\tan^{2}t}$$

$$=\int\frac{dt}{2\tan^{2}t+1}=\int\frac{\sec^{2}tdt}{\sec^{2}t(2\tan^{2}t+1)}$$

$$=\int\frac{\sec^{2}tdt}{(1+\tan^{2}t)(2\tan^{2}t+1)}=\int\frac{du}{(u^{2}+1)(2u^{2}+1)}$$

$$=\int\frac{2du}{1+2u^{2}}-\int\frac{du}{1+u^{2}}=\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}u)-\tan^{-1}u$$

$$=\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\tan t\right)-t+c$$

۸۴. $\int_{0}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}\frac{dx}{1+\cos^{2}x}$

حل

$$\int_{0}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}\frac{dx}{1+\cos^{2}x}=\int_{0}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}\frac{dx}{1+\frac{1}{\sec^{2}x}}$$

$$\int_{0}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}\frac{\sec^{2}x}{1+\sec^{2}x}dx=\int_{0}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}\frac{\sec^{2}x}{2+\tan^{2}x}dx$$

$$=\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left[\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]\right]_{0}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

۸۵. $\int e^{2t}\cos(e^{t})dt$

حل

$$\begin{cases}u=e^{t}\Rightarrow du=e^{t}dt\\ dv=e^{t}\cos(e^{t})dt\Rightarrow v=\sin e^{t}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int e^{2t}\cos e^{t}dt=e^{t}\sin e^{t}-\int e^{t}\sin e^{t}dt$$

$$=e^{t}\sin e^{t}+\cos e^{t}+c$$

۸۶. $\int_{0}^{1}\operatorname{Ln}\sqrt{x^{2}+1}\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=\operatorname{Ln}(x^{2}+1)\Rightarrow du=\frac{2xdx}{x^{2}+1}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{0}^{1}\operatorname{Ln}\sqrt{x^{2}+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\operatorname{Ln}(x^{2}+1)dx$$

$$=\left.\frac{1}{2}x\operatorname{Ln}(x^{2}+1)\right]_{0}^{1}-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x^{2}}{x^{2}+1}dx$$

$$=\left.\frac{1}{2}x\operatorname{Ln}(x^{2}+1)\right]_{0}^{1}-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(2-\frac{2}{x^{2}+1}\right)dx$$

$$=\left.\frac{1}{2}x\operatorname{Ln}(x^{2}+1)-x+\tan^{-1}x\right]_{0}^{1}=\frac{\operatorname{Ln}2}{2}-1+\frac{\pi}{4}$$

۸۷. $\int x\operatorname{Ln}(x^{3}+x)\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=\operatorname{Ln}(x^{3}+x)\Rightarrow du=\frac{3x^{2}+1}{x^{3}+x}\\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int x\operatorname{Ln}(x^{3}+x)dx=\frac{x^{2}}{2}\operatorname{Ln}(x^{3}+x)-\frac{1}{2}\int\frac{(3x^{2}+1)x^{2}}{x^{3}+x}dx$$

$$=\frac{x^{2}}{2}\operatorname{Ln}(x^{3}+x)-\frac{1}{2}\int\left(3x-\frac{2x}{x^{2}+1}\right)dx$$

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)(2+\tan^{-1}x)}=\int_{2}^{2+\frac{\pi}{4}}\frac{du}{u}$$

$$=\operatorname{Ln}|u|\Big]_{2}^{2+\frac{\pi}{4}}=\operatorname{Ln}\left(2+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{Ln}2=\operatorname{Ln}\left(\frac{8+\pi}{8}\right)$$

۹۳. $\int\frac{dx}{\cot^3 x}$

حل

$$\int\frac{dx}{\cot^3 x}=\int\tan^3 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\tan x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\operatorname{Ln}|\operatorname{Cos}x|+c$$

۹۴. $\int_{0}^{1/3}x\operatorname{Ln}\sqrt[3]{3x+1}\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=\operatorname{Ln}(3x+1)\Rightarrow du=\frac{3dx}{3x+1}\\ dv=x\,dx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}}x\operatorname{Ln}\sqrt[3]{3x+1}=\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{1}{3}}x\operatorname{Ln}(3x+1)dx$$

$$=\frac{1}{6}x^2\operatorname{Ln}(3x+1)\Big]_{0}^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{x^2dx}{3x+1}$$

$$=\frac{1}{6}x^2\operatorname{Ln}(3x+1)\Big]_{0}^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9(3x+1)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}x^2\operatorname{Ln}(3x+1)-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{18}-\frac{\operatorname{Ln}(3x+1)}{54}\Big]_{0}^{\frac{1}{3}}$$

۹۵. $\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}$

حل

$x=\tan u\Rightarrow dx=\sec^2 u\,du\Rightarrow$

$$\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{\tan^3 u\sec^2 u\,du}{(\tan^2 u+1)^2}=\int\frac{\tan^3 u.\sec^2 u}{\sec^4 u}du$$

$$=\int\frac{\tan^3 u}{\sec^2 u}du=\int\frac{\operatorname{Sin}^3 u}{\operatorname{Cos}u}du=\int\frac{(1-\operatorname{Cos}^2 u)\operatorname{Sin}u}{\operatorname{Cos}u}du$$

$$=\int(\tan u-\operatorname{Sin}u\operatorname{Cos}u)du=\operatorname{Ln}|\sec u|$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Cos}^2 u+c=\operatorname{Ln}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2(x^2+1)}+c$$

۹۶. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{Ln}(x^3+x)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+1)+c$$

۸۸. $\int_{0}^{1}x^3e^{x^2}dx$

حل

$$\begin{cases}u=e^{x^2}\Rightarrow du=2xe^{x^2}dx\\ \Rightarrow x\,dx=\frac{du}{2u},\ x^2=\operatorname{Ln}u\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{0}^{1}x^3e^{x^2}dx=\int_{0}^{1}x^2(xe^{x^2}dx)=\int_{1}^{e}\frac{\operatorname{Ln}u}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}(u\operatorname{Ln}u-u)\Big]_{1}^{e}=\frac{1}{2}$$

۸۹. $\int\frac{\operatorname{Cos}x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{Cos}^2 x}}$

حل

$\operatorname{Sin}x=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow\operatorname{Cos}x\,dx=\sqrt{3}\sec^2 u\,du\Rightarrow$

$$\int\frac{\operatorname{Cos}x\,dx}{\sqrt{4+\operatorname{Sin}^2 x-1}}=\int\frac{\operatorname{Cos}x\,dx}{\sqrt{3+\operatorname{Sin}^2 x}}=\int\frac{\sqrt{3}\sec^2 u\,du}{\sqrt{3(1+\tan^2 u)}}$$

$$=\int\sec u\,du=\operatorname{Ln}|\sec u+\tan u|+c$$

$$=\operatorname{Ln}\left|\sqrt{3+\operatorname{Sin}^2 x}+\operatorname{Sin}x\right|+c$$

۹۰. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\sec^2 x}}$

حل

$$\begin{cases}u=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x\Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^2 x\,dx\\ x=0\Rightarrow u=0;\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-\sec^2 x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{3-\tan^2 x}}$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{3}\,du}{\sqrt{3}\sqrt{1-u^2}}=\operatorname{Sin}^{-1}u\Big]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

۹۱. $\int x^2\operatorname{Sin}(1-x)\,dx$

حل

f(x) و مشتقاتش		g(x) و انتگرالهایش
x^2	+	$\operatorname{Sin}(1-x)$
$2x$	−	$\operatorname{Cos}(1-x)$
2	+	$-\operatorname{Sin}(1-x)$
0		$-\operatorname{Cos}(1-x)$

$$\Rightarrow I=x^2\operatorname{Cos}(1-x)+2x\operatorname{Sin}(1-x)-2\operatorname{Cos}(1-x)+c$$

۹۲. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)(2+\tan^{-1}x)}$

حل

$u=2+\tan^{-1}x\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow$

حل

$$\begin{cases} u^2=1-x \Rightarrow 2udu=-dx \\ x=0 \Rightarrow u=1; x=\frac{3}{4} \Rightarrow u=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x}} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{(u^2-1)2udu}{u}$$

$$=2\int_1^{\frac{1}{2}} (u^2-1)du = \frac{5}{12}$$

۹۷. $\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$

حل

$$\begin{cases} u^2=2x+1 \Rightarrow 2udu=2dx \\ x=0 \Rightarrow u=1; x=4 \Rightarrow u=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{u^2-1}{2}\right) u^2du = \frac{298}{15}$$

۹۸. $\int Ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=Ln(x+\sqrt{x^2-1}) \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = xLn\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$-\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = xLn\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1}+c$$

۹۹. $\int Ln(x-\sqrt{x^2-1})\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=Ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \Rightarrow du=\frac{-dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int Ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)dx = xLn\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) + \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=xLn\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) + \sqrt{x^2-1}+c$$

۱۰۰. $\int_0^{Ln\sqrt{3}} e^{-x}\tan^{-1}(e^x)\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=\tan^{-1}(e^x) \Rightarrow du=\frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \\ dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{Ln\sqrt{3}} e^{-x}\tan^{-1}(e^x)dx = -e^{-x}\tan^{-1}(e^x)\Big]_0^{Ln\sqrt{3}}$$

$$+\underbrace{\int_0^{Ln\sqrt{3}} \frac{dx}{1+e^{2x}}}_{(*)}$$

$$(*): \begin{cases} u=1+e^{2x} \Rightarrow du=2e^{2x}dx \Rightarrow dx=\frac{du}{2(u-1)} \\ x=0 \Rightarrow u=2, x=Ln\sqrt{3} \Rightarrow u=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{Ln\sqrt{3}} \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int_2^4 \frac{du}{2u(u-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{2}Ln\frac{3}{2} \Rightarrow I=\frac{-\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+Ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

۱۰۱. $\int Ln(x+\sqrt{x})\,dx$

حل

$$\begin{cases} u=Ln(x+\sqrt{x}) \Rightarrow du=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+2x}dx \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int Ln(x+\sqrt{x})dx = xLn\left|x+\sqrt{x}\right| - \underbrace{\int \frac{(2\sqrt{x}+1)x}{2x\sqrt{x}+2x}dx}_{(*)}$$

$$(*)=\int \frac{2\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx}_{(**)}$$

$$(**)=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{2u^2du}{u+1}, u^2=x$$

$$=2\int \left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)du = u^2-2u+2Ln|u+1|+c$$

$$=x-2\sqrt{x}+2Ln|\sqrt{x}+1|+c$$

انتگرالهای فوق را جایگذاری کنید

۱۰۲. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

حل ابتدا تغییر متغیر $u^2=x$ را انجام داده، سپس از تکنیک انتگرالگیری جزء به جزء استفاده نمائید.

$u^2=x \Rightarrow 2udu=dx \Rightarrow$

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx = 2\int u\tan^{-1}u\,du = u^2\tan^{-1}u$$

$$-\int \frac{u^2}{1+u^2}du = u^2\tan^{-1}u - u + \tan^{-1}u + c$$

$$=x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

۱۰۳. $\int_1^2 Ln(x^2+x)\,dx$

حل

$$\int_1^2 Ln(x^2+x)dx = \int_1^2 Lnx(x+1)dx$$

$$= \int_1^2 \mathrm{Ln}x\,dx + \int_1^2 \mathrm{Ln}(x+1)dx$$

$$= x\mathrm{Ln}x - 2x + (x+1)\mathrm{Ln}(x+1)\Big]_1^2 = 3\mathrm{Ln}3 - 2$$

۱۰۴. $\int_0^{\pi^2} \mathrm{Cos}\sqrt{x}\,dx$

حل

$u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx \Rightarrow$

$$\int_0^{\pi^2} \mathrm{Cos}\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^{\pi} u\mathrm{Cos}u\,du$$

$$= 2u\mathrm{Sin}u + 2\mathrm{Cos}u\Big]_0^{\pi} = -4$$

۱۰۵. $\int_0^{\pi^2/4} \mathrm{Sin}\sqrt{x}\,dx$

حل

$u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \mathrm{Sin}\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\mathrm{Sin}u\,du = -2u\mathrm{Cos}u + 2\mathrm{Sin}u\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

۱۰۶. $\int_0^2 \tan^{-1}\sqrt{x+1}\,dx$

حل فرض کنید $u^2 = x+1$.

۱۰۷. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx$

حل $\Rightarrow$

$$\begin{cases} u = \mathrm{Sin}^{-1}x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \sqrt{1-x^2}\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}x + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = \left(\frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{Sin}^{-1}x$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{Sin}^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\right)^2$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \frac{x^2}{4} + c$$

۱۰۸. $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{Sin}^2(2x)\,dx$

حل

$$\int_0^{\pi} x\mathrm{Sin}^2(2x)dx = \int_0^{\pi} x\left(\frac{1-\mathrm{Cos}4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{8}\mathrm{Sin}4x - \frac{1}{32}\mathrm{Cos}4x\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

۱۰۹. $\int \frac{\tan x\,dx}{\tan x + \sec x}$

حل در مزدوج مخرج ضرب کنید داریم

$$\int \frac{\tan x\,dx}{\tan x + \sec x} = -\int (\tan^2 x - \tan x\sec x)dx$$

$$= \int (\sec x\tan x - \sec^2 x + 1)dx = \sec x - \tan x + x + c$$

۱۱۰. $\int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}$

حل

$u^2 = e^{2t} + 1 \Rightarrow 2udu = 2e^{2t}dt \Rightarrow$

$$dt = \frac{udu}{e^{2t}} = \frac{udu}{u^2-1} \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}$$

$$= \int \frac{udu}{u(u^2-1)} = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{e^{2t}+1}-1}{\sqrt{e^{2t}+1}+1}\right| + c$$

۱۱۱. $\int \frac{dx}{(\mathrm{Cos}^2x + 4\mathrm{Sin}x - 5)\mathrm{Cos}x}$

حل

$$\int \frac{dx}{(\mathrm{Cos}^2x + 4\mathrm{Sin}x - 5)\mathrm{Cos}x} = \int \frac{\mathrm{Cos}x\,dx}{(\mathrm{Cos}^2x + 4\mathrm{Sin}x - 5)\mathrm{Cos}^2x}$$

$$= \int \frac{-\mathrm{Cos}x\,dx}{(\mathrm{Sin}^2x - 4\mathrm{Sin}x + 4)(1-\mathrm{Sin}^2x)} = \int \frac{-\mathrm{Cos}x\,dx}{(\mathrm{Sin}x - 2)^2(1-\mathrm{Sin}^2x)} = I$$

if $u = \mathrm{Sin}x$ then $du = \mathrm{Cos}x\,dx \Rightarrow I = \int \frac{-du}{(u-2)^2(1-u^2)}$

$$= \int \left[\frac{1}{3(u-2)^2} - \frac{4}{9(u-2)} + \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{18(u+1)}\right]du$$

$$= \frac{-1}{3(u-2)} - \frac{4}{9}\mathrm{Ln}|u-2| + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|u-1| - \frac{1}{18}\mathrm{Ln}|u+1| + c$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\mathrm{Sin}x-1| - \frac{1}{18}\mathrm{Ln}|\mathrm{Sin}x+1| - \frac{4}{9}\mathrm{Ln}|\mathrm{Sin}x-2| - \frac{1}{3(\mathrm{Sin}x-2)} + c$$

۱۱۲. $\int \frac{dt}{a+be^{ct}}$, $a,b,c \neq 0$

حل

$$\int \frac{dt}{a+be^{ct}} = \int \frac{e^{-ct}}{ae^{-ct}+b}dt = \frac{-1}{ac}\mathrm{Ln}\,|\,b+ae^{-ct}\,|$$

۱۱۳. $\int \sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Cos}x}}\,dx$ (α ثابت است) $0 < \alpha < x < \pi$

حل

$$\int \sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Cos}\alpha - \mathrm{Cos}x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{2\mathrm{Sin}^2\frac{x}{2}}{2\mathrm{Cos}^2\frac{\alpha}{2} - 2\mathrm{Cos}^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{\mathrm{Sin}^2(\frac{x}{2})/\mathrm{Cos}^2(\frac{\alpha}{2})}{1-\mathrm{Cos}^2(\frac{x}{2})/\mathrm{Cos}^2(\frac{\alpha}{2})}}\,dx = I$$

$$u = \frac{1}{\mathrm{Cos}(\frac{\alpha}{2})}\mathrm{Cos}(\frac{x}{2}) \Rightarrow du = \frac{\mathrm{Sin}(\frac{x}{2})}{-2\mathrm{Cos}(\frac{\alpha}{2})} \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{\mathrm{Sin}(\frac{x}{2})/\mathrm{Cos}(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2(\frac{x}{2})/\mathrm{Cos}^2(\frac{\alpha}{2})}}\,dx = \int \frac{-2du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -2\sin^{-1}u + c = -2\tan^{-1}\left(\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})}\right) + c$$

۱۱۴. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$

حل

$$\frac{1}{9x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(9x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{9}{9x^2+1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{9x^4+x^2} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{9}{9x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{x} - 3\tan^{-1}(3x) + c$$

۱۱۵. $\int_0^1 \ln(2x^2+4)dx$

حل

$$\begin{cases} u = \ln(2x^2+4) \Rightarrow du = \frac{2x\,dx}{x^2+2} \Rightarrow \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int_0^1 \ln(2x^2+4)dx = x\ln(2x^2+4)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2dx}{x^2+2}$$

$$= x\ln(2x^2+4)\Big]_0^1 - \int \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right) dx$$

$$= x\ln(2x^2+4) - 2x + 2\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big]_0^1$$

۱۱۶. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4}$

حل

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4} = \int \frac{-du}{u^2 - 5u + 4}$$

$$= \int \frac{-du}{(u-4)(u-1)} = \int \frac{-du}{3(u-4)} + \int \frac{du}{3(u-1)}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u-4}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x - 4}\right| + c$$

۱۱۷. $\int \frac{dt}{\sqrt{1-e^{-t}}}$

حل

$u^2 = 1 - e^{-t} \Rightarrow 2udu = e^{-t}dt \Rightarrow dt = \frac{2udu}{1-u^2} \Rightarrow$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-e^{-t}}} = 2\int \frac{udu}{u(1-u^2)} = \int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du$$

$$= \ln\left|\frac{u+1}{1-u}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{-t}}+1}{1-\sqrt{1-e^{-t}}}\right| + c$$

۱۱۸. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2} dx$

حل

$$\begin{cases} u = \tan^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= \frac{-1}{x}\tan^{-1}x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{-1}{x}\tan^{-1}x$$

$$+ \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$$

انتگرالهای مسائل ۱۱۹ـ۱۲۸ را محاسبه کنید. حتماً می‌توانید از عهدهٔ این کار برآیید.

۱۱۹. $\int (\sin^{-1}x)^2 dx$

حل

$$\begin{cases} u = (\sin^{-1}x)^2 \Rightarrow du = \frac{2\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int (\sin^{-1}x)^2 dx = x(\sin^{-1}x)^2 - \underbrace{\int \frac{2x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{(*)}$$

$$(*): \begin{cases} u = \sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = 2\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{2x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx = (2\sin^{-1}x)(\sqrt{1-x^2}) - 2\int dx$$

$$= 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - 2x + c$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \int (\sin^{-1}x)^2 dx = x(\sin^{-1}x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - 2x + c$$

۱۲۰. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$

حل

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \dots + \frac{A_m}{x+m}$$

$$\Rightarrow A_i = \frac{(-1)^i i^0}{i!(m-i)!} \Rightarrow \int \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+m)}$$

$$= \int \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!(m-i)!} \cdot \frac{1}{x+i} dx = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!(m-i)!} \ln|x+i| + c$$

۱۲۱. $\int x\sin^{-1}x\,dx$

حل

$$\begin{cases} u = \sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{(*)}$$

$(*)$: $x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u\,du \Rightarrow$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec u\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\sec u\tan u du\Rightarrow$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{4}\int\frac{(\sec u-1)\sec u\tan u du}{\frac{1}{2}\tan u}$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sec^2 u-\sec u)du=\frac{1}{2}\tan u-\frac{1}{2}Ln|\sec u+\tan u|+c$$

$$I=xLn\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}$$

$$+\frac{1}{4}Ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right|+c$$

۱۲۵. $\int\frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$

حل

$$t=\sin u\Rightarrow dt=\cos u du\Rightarrow$$

$$\int\frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{\cos u du}{\sin u-\cos u}=\int\frac{\cos u(\sin u+\cos u)}{\sin^2 u-\cos^2 u}du$$

$$=\int\frac{\cos u\sin u+\cos^2 u}{\sin^2 u-\cos^2 u}du=\int\frac{\frac{1}{2}\sin 2u+\frac{1}{2}\cos 2u+\frac{1}{2}}{-\cos 2u}du$$

$$=\frac{-1}{2}\int(\tan 2u+1+\sec 2u)du=\frac{1}{4}Ln|\cos 2u|-\frac{u}{2}$$

$$-\frac{1}{4}Ln|\sec 2u+\tan 2u|+c=\frac{1}{4}Ln|1-2t^2|$$

$$-\frac{1}{4}Ln\left|\frac{\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right)}{1-2t^2}\right|-\frac{1}{2}\sin^{-1}t+c$$

۱۲۶. $\int\frac{(2e^{2x}-e^x)dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

حل

$$u=e^x\Rightarrow du=e^x dx\Rightarrow$$

$$\int\frac{(2e^{2x}-e^x)}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}dx=\int\frac{e^x(2e^x-1)dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$$

$$=\int\frac{2u-1}{\sqrt{3u^2-6u-1}}du=\int\frac{2u-1}{\sqrt{3\left[(u-1)^2-\frac{4}{3}\right]}}du$$

$$u-1=\frac{2}{\sqrt{3}}\sec z\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{(\frac{4}{\sqrt{3}}\sec z+1)(\frac{2}{\sqrt{3}}\sec z\tan z)}{\frac{2}{\sqrt{3}}\tan z}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sec z+1\right)\sec z dz=\frac{4}{3}\int\sec^2 z dz$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sec z dz=\frac{4}{3}\tan z+\frac{1}{\sqrt{3}}Ln|\sec z+\tan z|+c$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin^2 u\cos u du}{\cos u}=\int\sin^2 u du$$

$$=\int\left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right)du=\frac{u}{2}-\frac{1}{4}\sin 2u+c$$

$$=\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\sin u\cos u+c=\frac{1}{2}\sin^{-1}x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$$

$$(*):\int x\sin^{-1}x dx=\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x-\frac{1}{4}\sin^{-1}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+c$$

۱۲۲. $\int\sin^{-1}\sqrt{x}\,dx$

حل

$$z^2=x\Rightarrow 2zdz=dx\Rightarrow$$

$$\int\sin^{-1}\sqrt{x}\,dx=2\int z\sin^{-1}z dz=I$$

$$\begin{cases}\sin^{-1}z=u\Rightarrow du=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\\ 2zdz=dv\Rightarrow v=z^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int 2z\sin^{-1}z dz=z^2\sin^{-1}z-\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int\sin^2\theta d\theta$$

$$=\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}+c$$

$$=\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+c=\frac{1}{2}\sin^{-1}z-\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2}+c$$

$$\Rightarrow I=z^2\sin^{-1}z-\frac{\sin^{-1}z}{2}+\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2}+c$$

$$=x\sin^{-1}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+c$$

۱۲۳. $\int\frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$

حل

$$\int\frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}=\int\frac{d\theta}{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\int\frac{\cos^2\theta d\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta-1+\cos 2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int\frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sec 2\theta+1)d\theta=\frac{1}{4}Ln|\sec 2\theta+\tan 2\theta|+\frac{1}{2}\theta+c$$

۱۲۴. $\int Ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\,dx$

حل

$$\begin{cases}u=Ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\Rightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x(x+1)}}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int Ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)dx=xLn\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{u^2-2u-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{Ln}\left|u-1+\sqrt{u^2-2u-\frac{1}{3}}\right|+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{2\sqrt{e^{2x}-2e^x-\frac{1}{3}}+4\mathrm{Ln}\left|e^x-1+\sqrt{e^{2x}-2e^x-\frac{1}{3}}\right\}+c\right.$$

۱۲۷. $\int\frac{dx}{x^4+4}$

حل

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{(x^2+2)^2-4x^2}=\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}\Rightarrow A=\frac{1}{8},B=\frac{1}{4}=D,C=\frac{-1}{8}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x^4+4}=\int\frac{\frac{x}{8}+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{\frac{-x}{8}+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{16}\left\{\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\frac{2dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int\frac{2dx}{(x-1)^2+1}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\mathrm{Ln}\left|x^2+2x+2\right|+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x+1)-\frac{1}{16}\mathrm{Ln}\left|x^2-2x+2\right|+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x-1)+c$$

۱۲۸. $\int\frac{dx}{x^6-1}$

حل

$$\frac{1}{x^6-1}=\frac{1}{(x^3-1)(x^3+1)}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{1}{6(x-1)}-\frac{x+2}{6(x^2+x+1)}+\frac{(x-2)}{6(x^2-x+1)}-\frac{1}{6(x+1)}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{1}{6}\int\frac{(x-2)}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$I_1=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$

$$I_2=\frac{-1}{6}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{(x+2)dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\,du$$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{6}\int\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\right)du}{\frac{3}{4}\sec^2 u}$$

$$=-\frac{1}{6}\int(\tan u+\sqrt{3})du=\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\left|\mathrm{Cos}\,u\right|-\frac{\sqrt{3}}{6}u+c$$

$$=\frac{1}{6}\mathrm{Ln}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$I_3=\frac{1}{6}\int\frac{(x-2)}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{6}\int\frac{(x-2)dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$x-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\,du\Rightarrow$$

$$I_3=\frac{1}{6}\int\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 u\right)}{\frac{3}{4}\sec^2 u}du$$

$$=\frac{1}{6}\int(\tan u-\sqrt{3})du=\frac{-1}{6}\mathrm{Ln}\left|\mathrm{Cos}\,u\right|-\frac{\sqrt{3}}{6}u+c$$

$$=\frac{-1}{6}\mathrm{Ln}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2+I_3$$

در مسائل ۱۲۹-۱۳۱، هر یک از حدها را محاسبه کنید. به این منظور هر یک را با یک انتگرال معین مناسب بیان، و این انتگرال را محاسبه کنید.

۱۲۹. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+0^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}\right)$

حل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+0^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\dots+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{n^2}{n^2+i^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

۱۳۰. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Ln}\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$

حل

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ln}\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(1+\frac{k}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Ln}(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\mathrm{Ln}(1+x)dx$$

$$=(x+1)\mathrm{Ln}(1+x)-x\Big]_0^1=2\mathrm{Ln}2-1$$

۱۳۱. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

حل

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{\sqrt{n^2-k^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{Sin}^{-1}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

۱۳۲. نشان دهید که $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ همگراست. مقدار آن را بیابید.

حل انتگرال نامعین این تمرین قبلاً حل شده است پس داریم.

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^3 e^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-x^2}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b = \frac{1}{2}$$

توجه کنید $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

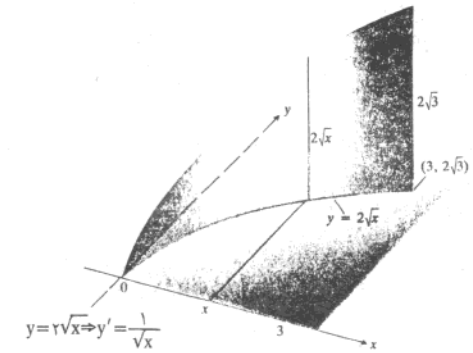
۱۳۳. نشان دهید که $\int_0^1 \operatorname{Ln} x\, dx$ همگراست. مقدار آن را بیابید.

حل

$$\int_0^1 \operatorname{Ln} x\, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \operatorname{Ln} x\, dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+} [\, x \operatorname{Ln} x - x \,]_a^1 = -1$$

۱۳۴. از نقاط روی خم $y = 2\sqrt{x}$ خطوطی به طول $h=y$ عمود بر صفحه مختصات رسم شده‌اند (کل ۳۳.۷). مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از این خطوط از $(0,0)$ تا $(3, 2\sqrt{3})$.



$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

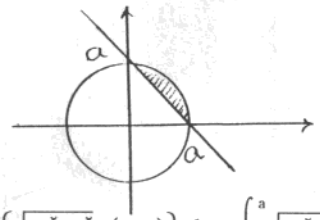
$$A = \int_a^b y\, ds = \int_0^3 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^3 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)}\, dx = 2 \int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx$$

$$= \frac{4}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^3 = \frac{28}{3}$$

۱۳۵. ورقه‌ای به یک خط مستقیم و یک قوس 90° از دایره‌ای به شعاع a محدود است. مساحت و مرکزوارش را بیابید.

حل فرض کنید دایره به مرکز مبدأ باشد، خطی که از دو نقطه $(a,0)$ و $(0,a)$ می‌گذرد، $y=-x+a$ می‌باشد و معادله دایره $x^2+y^2=a^2$ است پس کافی است انتگرال زیر را حساب کرد



$$A = \int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2} - (a-x) \right) dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$- \int_0^a (a-x)\, dx = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

برای محاسبه انتگرال اول تغییر متغیر $x = a\operatorname{Sin} u$ بدهید داریم.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \operatorname{Cos}^2 x\, dx$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{Cos} 2x)\, dx = \frac{a^2 \pi}{4}$$

$$M_y = \int_0^a x \left(\sqrt{a^2 - x^2} (a-x) \right) dx = \frac{a^3}{6}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2}{6} \left(\frac{4}{a^2(\pi - 2)} \right) = \frac{2a}{3(\pi - 2)}$$

و به همین شکل بنا بر تقارن $\bar{x} = \bar{y}$ است.

۱۳۶. مطلوب است مختصات مرکز جرم ناحیهٔ محدود به خمهای $y=e^x$، $x=1$ و $y=1$.

حل

$$M = \int_0^1 (e^x - 1)\, dx = e^x - x \Big]_0^1 = e - 2$$

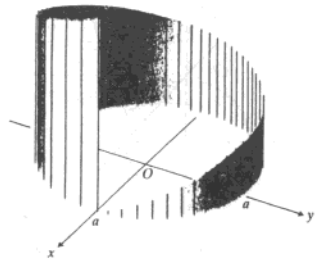
$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2} (e^x + 1)(e^x - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{2x} - 1)\, dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{x}{2} \Big]_0^1 = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$M_y = \int_0^1 x(e^x - 1)\, dx = x(e^x - 1) - \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

۱۳۷. از نقاط واقع بر دایره‌ای به شعاع a، عمودهایی از صفحهٔ آن اخراج می‌شوند. طول هر عمود در نقطه‌ای مانند P برابر ks است که s طول قوسی از دایره از $(a,0)$ تا P و k یک عدد ثابت مثبت است. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از عمودهای اخراج شده از قوسی که از $(a,0)$ شروع می‌شود و پس از یکبار دور زدن دایره پایان می‌یابد. شکل ۳۴.۷ را ببینید.



حل می‌دانیم $s=a\theta$ پس $ds=ad\theta$ در نتیجه داریم.

$$A=\int_{0}^{2\pi} ksds=ka^{2}\int_{0}^{2\pi}\theta d\theta=ka^{2}\frac{\theta^{2}}{2}\Big]_{0}^{2\pi}=2k\pi^{2}a^{2}$$

۱۳۸. مطلوب است طول قوس $y=Lnx$ از $x=1$ تا $x=e$

حل $L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^{2}}\,dx\ ,\ f(x)=Lnx\Rightarrow f'(x)=\frac{dx}{x}\Rightarrow$

$$L=\int_{1}^{e}\sqrt{1+\frac{1}{x^{2}}}\,dx=\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{x^{2}+1}}{x}\,dx$$

$$\begin{cases}x=\tan u\Rightarrow dx=\sec^{2}u\,du\\ x=1\Rightarrow u=\frac{\pi}{4},x=e\Rightarrow u=\tan^{-1}e\end{cases}\Rightarrow$$

$$L=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e}\frac{\sec^{3}u}{\tan u}du=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e}(\tan u\sec u+\csc u)du$$

$$=\sec u-Ln\mid \csc u+\cot u\mid\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e}$$

$$=\sqrt{1+e^{2}}-Ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2}}+1}{e}\right|-\sqrt{2}+Ln(1+\sqrt{2})$$

۱۳۹. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قوس مسألهٔ ۱۳۹ حول محور y ایجاد می‌شود.

حل بنابر مسأله قبل داریم $ds=\frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}dx$ پس

$$S=2\pi\int_{1}^{e}xdx=2\pi\int_{1}^{e}\sqrt{1+x^{2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e}\sec^{3}u\,du$$

۱۴۰. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران خم $y=e^{x}$، $0\le x\le 2$ حول محور x ایجاد می‌شود.

حل $S=2\pi\int_{a}^{b}yds=2\pi\int_{0}^{2}e^{x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e^{2}}\tan u\sqrt{1+\tan^{2}u}\sec^{2}u\,du$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e^{2}}\tan u\sec^{3}u\,du=\frac{2\pi}{3}\sec^{3}u\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}e^{2}}$$

۱۴۱. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران خم $y=\cos x$، $-\pi/2\le x\le\pi/2$ حول محور x ایجاد می‌شود.

حل $S=2\pi\int_{a}^{b}yds=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^{2}x}\,dx$

$$\begin{cases}\sin x=\tan u\Rightarrow\cos x\,dx=\sec^{2}u\,du\\ x=\frac{\pm\pi}{2}\Rightarrow u=\frac{\pm\pi}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^{3}u\,du=\pi\left[\sec u\tan u+\ln\mid\sec u+\tan u\mid\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\pi[\sqrt{2}+Ln(1+\sqrt{2})]$$

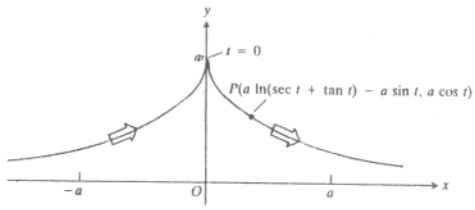
۱۴۲. ناحیه‌ای در ربع اول واقع و به خم $y=Ln(1/x)$ و محورهای مختصات محدود است. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x

حل $v=\pi\int_{a}^{b}\left[f(x)\right]^{2}dx=\pi\int_{0}^{1}\left(Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2}dx$

$$=\lim_{a\to 0^{+}}\pi\int_{a}^{1}(Lnx)^{2}dx=\pi\lim_{a\to 0^{+}}(x(Lnx)^{2}$$

$$-2xLnx+2x)\Big]_{a}^{1}=2\pi$$

۱۴۳. مطلوب است مساحت ناحیهٔ واقع بین محور x و خم $x=a\ Ln(\sec t+\tan t)-a\sin t$، $y=a\cos t$، $-\pi/2<t<\pi/2$. شکل ۳۵.۷ را ببینید.



۳۵.۷

حل $\frac{dx}{dt}=\frac{a(\sec^{2}t+\sec t\tan t)}{\sec t+\tan t}-a\cos t=\frac{a\sin^{2}t}{\cos t}$

$$A=\int_{a}^{b}ydx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\left(\frac{a\sin^{2}t}{\cos t}\right)dt=\frac{a^{2}\pi}{2}$$

۱۴۴. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ مسالهٔ ۱۴۴ حول محور x

حل
$$v=2\pi\int_a^b y^2dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(aCost)^2\frac{a^2Sin^2t}{Cost}dt$$
$$=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(Cost-Cos^3t)dt=\frac{2\pi a^3}{3}$$

۱۴۵. مطلوب‌است‌مساحت رویهٔ حاصل از دوران ناحیهٔ مسألهٔ ۱۴۴ حول محور x

حل
$$S=2\pi\int_a^b y\,ds \text{ و } x'=a\frac{Sin^2t}{Cost},\ y'=-aSint\Rightarrow$$
$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}aCost\sqrt{\frac{a^2Sin^4t}{Cos^2t}+a^2Sin^2t}\,dt$$
$$=2\pi a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|Sint|\sqrt{1+Cos^2t}\,dt$$
$$=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sint\sqrt{1+Cos^2t}\,dt=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}sec^3u\,du$$
$$=2\pi a^2\left[secutanu+Ln|secutanu|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=2\pi a^2\left[\sqrt{2}+Ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

۱۴۶. آیا انتگرال
$$\int_1^\infty\frac{Lnx\,dx}{x^2}$$
همگراست یا واگرا؟

حل به ۱ همگراست

۱۴۷. خمهای زیر را رسم کنید و رفتار آنها را به ازای $|x|$های بزرگ شرح دهید. الف) $y=x-e^x$ ب) $y=e^{(x-e^x)}$

نشان دهید که انتگرالهای زیر همگرایند و مقدارشان را محاسبه کنید.

پ) $\int_{-\infty}^{b}e^{(x-e^x)}dx$ ت) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{(x-e^x)}dx$

حل
$$(c)\int_{-\infty}^{b}e^{x-e^x}=\int_{-\infty}^{b}e^xe^{-e^x}dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b e^x-e^x\,dx=\lim_{a\to\infty}(-e^x)\Big]_a^b=1-e^{-e^b}$$
$$(d)\int_{-\infty}^{\infty}e^{x-e^x}dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^{\infty}f(x)dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c e^xe^{-e^x}dx+\lim_{b\to\infty}\int_c^b e^xe^{-e^x}dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\left[-e^{-e^x}\right]_a^c+\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-e^x}\right]_c^b=1$$

۱۴۸. مطلوب است محاسبهٔ
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{ny^{n-1}}{1+y}dy$$

حل
$$\begin{cases}u=\frac{1}{1+y}\Rightarrow du=\frac{-dy}{(1+y)^2}\Rightarrow\\ dv=ny^{n-1}dy\Rightarrow v=y^n\end{cases}$$
$$\lim\int_0^1\frac{ny^{n-1}}{1+y}dy=\lim_{n\to\infty}\frac{y^n}{1+y}\Big]_0^1+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^2}dy$$
$$=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^2}dy$$
$$0\le y\le1\Rightarrow\frac{y^n}{(1+y)^2}\le y^n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_0^1 y^n\,dy=0$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{y^n}{(1+y)^2}dy=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{ny^{n-1}}{1+y}dy=\frac{1}{2}$$

۱۴۹. $\int_0^\pi\frac{dx}{1+Sinx}$

حل
$$\int_0^\pi\frac{dx}{1+Sinx}=\int_0^\infty\frac{2dz}{(1+z^2)(1+\frac{2z}{1+z^2})}$$
$$=\int_0^\infty\frac{2dz}{(1+z)^2}=\lim_{b\to\infty}\frac{-2}{1+z}\Big]_0^\infty=-2$$

۱۵۰. $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{1-Cosx}$

حل
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1-Cosx}=\int_1^\infty\frac{2dz}{(1-\frac{1-z^2}{1+z^2})(1+z^2)}$$
$$=\int_1^\infty\frac{dz}{z^2}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{z}\right]_1^b=1$$

۱۵۱. $\int\frac{dx}{1-Sinx}$

حل
$$\int\frac{dx}{1-Sinx}=\int\frac{2dz}{(1+z^2)(1-\frac{2z}{1+z^2})}$$
$$=\int\frac{2dz}{(1-z)^2}=\frac{2}{1-z}=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+c$$

۱۵۲. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+Cosx}$

حل
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+Cosx}=\int_0^1\frac{2dz}{(1+z^2)(2+\frac{1-z^2}{1+z^2})}$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_{0}^{1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

۱۵۳. $\int \frac{\text{Cosx}\, dx}{1-\text{Cosx}}$

حل

$$\int \frac{\text{Cosx}}{1-\text{Cosx}} dx = \int \frac{\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)2dz}{(1+z^2)\left(1-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \int \frac{1-z^2}{z^2(1+z^2)} dz = \int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{1+z^2}\right) dz$$

$$= \frac{-1}{z} - 2\tan^{-1}z + c = \frac{-1}{\tan(x/2)} - 2\left(\frac{x}{2}\right) + c = -\cot\frac{x}{2} - x + c$$

۱۵۴. $\int \frac{dx}{1+\text{Sinx}+\text{Cosx}}$

حل

$$\int \frac{dx}{1+\text{Sinx}+\text{Cosx}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{1+z} = \text{Ln}\,|\,1+z\,| + c = \text{Ln}\left|\,1+\tan\frac{x}{2}\,\right| + c$$

۱۵۵. $\int \frac{dx}{\text{Sinx}-\text{Cosx}}$

حل

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{Ln}\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1+\sqrt{2}}{\tan(\frac{x}{2})+1-\sqrt{2}}\right| + c$$

۱۵۶. $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{\text{Sinx}+\text{tanx}}$

حل

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\text{Sinx}+\text{tanx}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\text{Cosx}\,dx}{\text{Sinx}\,\text{Cosx}+\text{Sinx}}$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{(1-z^2)}{2z} dz = \frac{1}{2}\text{Ln}\,|\,z\,| - \frac{z^2}{4}\Bigg]_{1}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\text{Ln}3 - \frac{1}{2}$$

بسیاری از مردم لایه نقره را در انتظار طلا از دست می‌دهند.
«موریس وبستر»

فصل هشتم
مقاطع مخروطی و سایر خمهای مسطح

Conic sections and other plane curve

۱.۸ معادله‌های حاصل از فرمول فاصله
Equtions from the distance formula

در هر یک از مسایل ۱ـ۱۱، با استفاده از فرمول فاصله، معادلهٔ مجموعه نقاطی چون $p(x,y)$ را بیابید که در شرط داده شده صدق کنند.

۱. فاصله P از مبدأ و از خط $y=-4$ یکی باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{x^2+y^2} \\ d_2=|y-(-4)| = |y+4| \end{cases} \quad d_1=d_2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=|y+4| \Rightarrow x^2+y^2=(y+4)^2 \Rightarrow x^2=8(y+2)$$

۲. فاصله P از نقطه $(0,1)$ و از خط $y=-1$ یکی باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\ d_2=|y-(-1)| = |y+1| \end{cases} \quad ; \quad d_1=d_2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1| \Rightarrow x^2=4y$$

۳. فاصله P از دو نقطه $A(-2,1)$ و $B(2,-3)$ یکی باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} \\ d_2=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1=d_2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} \Rightarrow x-y=1$$

۴. فاصله P تا $F_1(-1,0)$ دو برابر فاصله‌اش تا $F_2(2,0)$ باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ d_2=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1=2d_2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow (x-3)^2+y^2=4$$

۵. حاصلضرب فاصله‌های P تا $F_1(-2,0)$ و تا $F_2(2,0)$، ۴ باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \\ d_2=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1.d_2=4 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}.\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4 \Rightarrow (x^2+y^2)^2+8(y^2-x^2)=0$$

۶. مجموع فاصله‌های P تا $F_1(1,0)$ و $F_2(0,1)$ ثابت باشد، و خم از مبدأ بگذرد.

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ d_2=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1+d_2=c \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=c$$
چون خم از مبدأ می‌گذرد، پس داریم
$$\sqrt{1+0}+\sqrt{0+1}=c \Rightarrow c=2$$

۷. فاصله P تا خط $x=-2$ دو برابر فاصله‌اش تا $(2,0)$ باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=|x-(-2)| = |x+2| \\ d_2=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1=2d_2 \Rightarrow$$
$$|x+2|=2\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow 3x^2-20x+4y^2+12=0$$

۸. فاصله P تا $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ برابر باشد با ۲ به علاوهٔ فاصله P تا $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2} \\ d_2=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1=d_2+2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}+2$$
$$\Rightarrow x^2+4xy+y^2=3$$

۹. فاصله P تا نقطه $(-3,0)$ برابر باشد با ۴ به علاوهٔ فاصله P تا نقطه $(3,0)$

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x+3)^2+y^2} \\ d_2=\sqrt{(x-3)^2+y^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1=d_2+4 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}+4 \Rightarrow 5x^2-4y^2=20$$

۱۰. فاصله P تا خط $y=1$ از فاصله‌اش تا مبدأ ۳ واحد کمتر باشد.

حل
$$\begin{cases} d_1=|y-1| \\ d_2=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad ; \quad d_1=d_2-3 \Rightarrow$$
$$|y-1|=\sqrt{x^2+y^2}-3 \Rightarrow \begin{cases} x^2=4(y+1) \text{ if } y>1 \\ x^2=-8(y-2) \text{ if } y<1 \end{cases}$$

۱۱. فاصله P تا نقطه $(2,3)$ سه واحد باشد.

حل $d=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=3 \Rightarrow (x^2-2)^2+(y-3)^2=9$

۱۲. نقاطی از خط $x-y=1$ را بیابید که فاصله‌شان تا نقطه $(3,0)$ برابر با ۲ واحد باشد.

حل $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2 \Rightarrow (x-3)^2+y^2=4 \quad (*)$

$x-y=1 \quad x=y+1 \quad (**)$

$(*), (**) \Rightarrow (y+1-3)^2+y^2=4 \Rightarrow y^2-2y=0$

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=2 \Rightarrow x=3 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)=\begin{cases}(1,0)\\(3,2)\end{cases}$$

۱۳. نقطه‌ای بیابید که از سه نقطه $A(0,1)$، $B(1,0)$، و $C(4,3)$ به یک فاصله باشد. شعاع دایرهٔ گذرنده از نقاط A، B، C چیست؟

حل
$$\begin{cases} d_1=\sqrt{x^2+(y-1)^2} & d_1=d_2 \Rightarrow \\ d_2=\sqrt{(x-1)^2+y^2} & d_1=d_3 \Rightarrow \\ d_3=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow x=y \\ \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} \Rightarrow 2x+y=6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=y=2$

شعاع دایره‌ای که از نقطه یاد شده می‌گذرد برابر است با فاصله نقطه $(2,2)$ از هر یک از این سه نقطه که مثلاً فاصله آن از $(1,0)$ را حساب می‌کنیم.

$$R=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

۲.۸ دایره Circles

A circle is the set of points in a plane whose distance from a given fixed point in the plane is constant. The standard equation for the circle of radius a centenreal at the point (h,k) is

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

در مسائل ۱ـ۴ دایره به مرکز $C(h,k)$ و شعاع a را بیابید.

۱. $C(0,2), a=2$

حل $(x-0)^2+(y-2)^2=4$

۲. $C(-2,0), a=3$

حل $(x+2)^2+(y-0)^2=9$

۳. $C(3,-4), a=5$

حل $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

۴. $C(1,1), a=\sqrt{2}$

حل $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

۵. یک نابرابری بنویسید که نقاط درون دایرهٔ به مرکز $C(-2,-1)$ و به شعاع $a=\sqrt{6}$ را توصیف کند.

حل $(x+2)^2+(y+1)^2<6$

۶. یک نابرابری بنویسید که نقاط بیرون دایرهٔ به مرکز $C(-4,2)$ و به شعاع $a=4$ را توصیف کند.

حل $(x+4)^2+(y-2)^2>16$

در مسائل ۷ـ۱۶ مرکز و شعاع دایرهٔ مفروض را بیابید. سپس دایره را رسم کنید. (راهنمایی برای رسم دایره: ابتدا دایره را رسم، و مرکز آن را مشخص کنید. سپس با استفاده از این مرکز و شعاع جای محورهای مختصات را تعیین، و آنها را رسم کنید.)

۷. $x^2+y^2=16$

حل $a=4 \ , \ c(0,0)$

۸. $x^2+y^2+6y=0$

حل $x^2+y^2+6y+9=9 \Rightarrow (x-0)^2+(y+3)^2=9$

$\Rightarrow c(0,-3) \ \& \ a=3$

۹. $x^2+y^2-2y=3$

حل $x^2+y^2-2y+1=4 \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=4$

$\Rightarrow c(0,1) \ , \ a=2$

۱۰. $x^2+y^2+2x=8$

حل $x^2+y^2+2x+1=9 \Rightarrow (x+1)^2+(y-0)^2=9$

$\Rightarrow C(-1,0) \ , \ a=3$

۱۱. $x^2+4x+y^2=12$

حل $x^2+4x+y^2+4=16 \Rightarrow (x+2)^2+y^2=16$

$\Rightarrow C(-2,0) \ \& \ a=4$

۱۲. $3x^2+3y^2+6x=1$

حل $x^2+y^2+2x=\frac{1}{3} \Rightarrow x^2+2x+y^2+1=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+0)^2=\frac{4}{3} \Rightarrow C(-1,0) \ , \ a=\frac{2}{\sqrt{3}}$

۱۳. $x^2+y^2+2x+2y=-1$

حل $x^2+2x+1+y^2+2y+1=1 \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=1$

$\Rightarrow C=(-1,-1) \ \& \ a=1$

۱۴. $x^2+y^2-6x+2y+1=0$

حل $x^2-6x+9+y^2+2y+1=9 \Rightarrow$

$(x-3)^2+(y+1)^2=9 \Rightarrow C(3,-1) \ \& \ a=3$

۱۵. $2x^2+2y^2+x+y=0$

حل $x^2+y^2+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0$

$x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{4})^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{8} \Rightarrow (-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}) \ , \ a=\frac{1}{\sqrt{8}}$

۱۶. $2x^2+2y^2-28x+12y+114=0$

حل $x^2+y^2-14x+6y+57=0$

$\Rightarrow x^2-14x+49+y^2+6y+9=1$

$(x-7)^2+(y+3)^2=1 \Rightarrow C(7,-3) \ , \ a=1$

در مسائل ۱۷ و ۱۸، چه نقاطی در نابرابری صدق می‌کنند؟

۱۷. $x^2+y^2+2x-4y+5\le 0$

حل $x^2+2x+1+y^2-4y+4\le 0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2\le 0$

تنها نقطه $(-1,2)$ در نابرابری فوق صادق است.

۱۸. $x^2+y^2+4x+4y+9\ge 0$

حل $x^2+4x+4+y^2+4y+4\ge -1$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y+2)^2\ge -1$

هر نقطه $(x,y)\in R$ در رابطه فوق صادق است.

۱۹. برای دایرهٔ گذرنده از نقطه $(4,5)$ و به مرکز $(2,2)$ معادله‌ای بیابید.

حل $(x-2)^2+(y-2)^2=a^2$

$\Rightarrow (4-2)^2+(5-2)^2=a^2 \Rightarrow a=\sqrt{13}$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=13$

۲۰. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(0,0)$ و $(6,0)$ و مماس بر خط $y=-1$ معادله‌ای بنویسید.

حل معادله کلی $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ می‌باشد مرکز روی عمود منصف وتر گذرنده از $(0,0)$ و $(6,0)$ می‌باشد پس $h=\frac{6+0}{2}=3$ در این صورت داریم $(x-3)^2+(y-k)^2=a^2$ نقطه $(6,0)$ روی دایره قرار دارد پس

$(6-3)^2+(0-k)^2=a^2 \Rightarrow 9+k^2=a^2$

حال چون دایره بر خط $y=-1$ مماس است در اینصورت $k=a-1$ بنابراین $9+(a-1)^2=a^2$ یا $a=5$ در اینصورت $k=5-1=4$ پس معادله دایره عبارت است از:

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

۲۱. برای دایرهٔ به مرکز $(-1,1)$ که بر خط $x+2y=4$ مماس باشد، معادله‌ای بنویسید.

حل کافی است شعاع دایره را بدست آوریم و این برابر است با فاصله نقطه $(-1,1)$ تا خط داده شده است. پس

$$R=d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\frac{|-1+2(1)-4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

و بنابراین معادله دایره به صورت $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{9}{5}$ می‌باشد.

۲۲. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(0,0)$ و $(17,7)$ که مرکزش بر خط $12x-5y=0$ قرار داشته باشد؟ معادله‌ای بنویسید.

حل معادله کلی دایره $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ است. از طرفی $(0,0)$ متعلق به دایره است پس $h^2+k^2=r^2$ حال اگر به جای r^2 در معادله کلی معادلش را قرار دهیم داریم

$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2+k^2$

حال نقطه $(17,7)$ را در دایره قرار می‌دهیم و آنرا ساده می‌کنیم.

داریم $17h+7k=169$. از طرفی $12x=5y$ روی خط (h,k) قرار دارد یعنی $k=\frac{12}{5}h$، حال به جای k در معادله بدست آمده، $\frac{12}{5}h$ قرار می‌دهیم داریم، $17h+7(\frac{12}{5}h)=169$ در اینصورت $h=5$ و بنابراین $k=12$ در اینصورت $r^2=144+25=169$ و معادله دایره مورد نظر $(x-5)^2+(y-12)^2=169$ می‌باشد.

۲۳. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(2,3)$، $(3,2)$، $(-4,3)$ معادله‌ای بنویسید.

حل کافی است سه نقطه داده شده را در معادله کلی دایره قرار دهیم تا a و b و c بدست آیند.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow \begin{cases}13+2a+3b+c=0\\13+3a+2b+c=0\\25-4a+3b+c=0\end{cases} \Rightarrow$$

$a=b=2\ ,\ c=-23 \Rightarrow x^2+y^2+2x+2y=23$

۲۴. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(1,0)$، $(0,1)$، و $(2,2)$ معادله‌ای بنویسید.

حل با توجه به توضیحات مساله قبل داریم

$$\begin{cases}1+a+c=0\\1+b+c=0\\8+2a+2b+c=0\end{cases} \Rightarrow a=b=\frac{-7}{3}, c=\frac{4}{3}$$

در اینصورت $x^2+y^2-\frac{7}{3}x-\frac{7}{3}y+\frac{4}{3}=0$ معادله مورد نظر است.

۲۵. برای دایره گذرنده از نقاط $(7,1)$، $(0,0)$، و $(-1,7)$ معادله‌ای بنویسید مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

حل
$$\begin{cases}50+7a+b+c=0\\c=0\\50-a+7b+c=0\end{cases} \Rightarrow a=-6\ ,\ b=-8$$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x-8y=0 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16=25$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$

۲۶. آیا نقطه $(1/3/0)$ درون دایرهٔ $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ واقع است یا بیرون آن یا روی آن؟ چرا؟

حل نقطه خارج دایره است.

۲۷. اگر فاصلهٔ نقطه $P(x,y)$ تا نقطه $(6,0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $(0,3)$ باشد، نشان دهید که P بر یک دایره واقع است. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

حل
$$\begin{cases}d_1=\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}\\d_2=\sqrt{x^2+(y-3)^2}\end{cases};\quad d_1=2d_2 \Rightarrow$$

$(x+2)^2+(y-4)^2=20$

که دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{5}$ و مرکز $(-2,4)$ می‌باشد.

۲۸. مجموع مجذورات فواصل نقطه $P(x,y)$ تا دو نقطه $A(-5,2)$ و $B(1,4)$ برابر با ۵۲ است. نشان دهید که مکان P دایره‌ای است که مرکزش وسط پاره‌خط AB است. آیا A و B، درون این دایره واقع اند یا بیرون آن یا روی آن؟

حل وسط AB، $(-2,3)$ می‌باشد و داریم

$$\begin{cases}d_1=\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}\\d_2=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}\end{cases},\ d_1^2+d_2^2=52$$

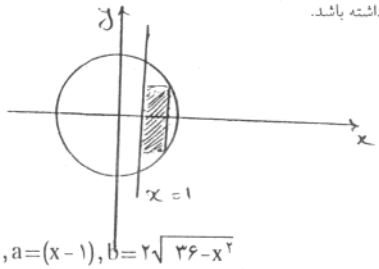
$\Rightarrow (x+5)^2+(y-2)^2+(x-1)^2+(y-4)^2=52$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=16$

که معادله دایره به مرکز $(-2,3)$ وسط AB است و شعاع آن ۴ است. فاصله مرکز $(-2,3)$ تا A یا B برابر است با $\sqrt{(5-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$ و چون $\sqrt{10}<4$ است پس A و B درون دایره قرار دارند.

۲۹. مطلوب است ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت که درون بخش کوچکتر حاصل از تقاطع دایره $x^2+y^2=36$ با خط $x=1$ جای می‌گیرد.

حل فرض کنید که یکی از اضلاع این مستطیل در امتداد خط مفروض قرار داشته باشد.



$$S=a.b,\ a=(x-۱),\ b=۲\sqrt{۳۶-x^۲}$$

$$\Rightarrow S=۲(x-۱)\sqrt{۳۶-x^۲} \Rightarrow S'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x(۲(x-۱))}{۲\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$S'(x)=۰ \Rightarrow ۲(۳۶-x^۲)-۲x^۲+۲x=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+x+۳۶=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{x}{۲}-۱۸=۰$$

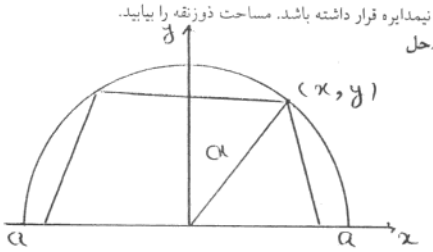
$$\Rightarrow (x+۴)(x-\frac{۹}{۲})=۰ \Rightarrow x=-۴\ ,\ x=\frac{۹}{۲}$$

$x=-۴$ قابل قبول نیست پس $x=\frac{۹}{۲}$ و بنابراین

$$a=x-۱=\frac{۹}{۲}-۱=\frac{۷}{۲},\ b=\frac{۳\sqrt{۷}}{۲}$$

۳۰. مطلوب است طول قاعدهٔ بالایی ذوزنقه‌ای با بیشترین مساحت که در یک نیمدایره به شعاع a محاط می‌شود، با این شرط که قاعده پایینی آن روی قطر نیمدایره قرار داشته باشد. مساحت ذوزنقه را بیابید.

حل



طول قاعده بزرگ چون روی قطر است پس ۲a می‌باشد با توجه به شکل طول قاعده کوچک ۲x و ارتفاع آن y می‌باشد. مساحت ذوزنقه نصف مجموع دو قاعده در ارتفاع است. یعنی $S=\frac{۱}{۲}y(۲x+۲a)=y(x+a)$

از طرفی $y=\sqrt{a^۲-x^۲}$ پس $S(x)=\sqrt{a^۲-x^۲}(x+a)$

$$S'(x)=\frac{۲a^۲-۲ax-۴x^۲}{۲\sqrt{a^۲-x^۲}}=۰ \Rightarrow x=\frac{a}{۲}$$

پس $۲x=a$ طول قاعده بالائی است.

۳۱. به طریق هندسی نشان دهید که طول s هر یک از خطوطی که از یک نقطه $(x_۱,y_۱)$ واقع در بیرون دایره $(x-h)^۲+(y-k)^۲=a^۲$ بر دایره مماس شود، در معادلهٔ $s^۲=(x_۱-h)^۲+(y_۲-k)^۲-a^۲$ صدق می‌کند.

حل

بی‌هیچ توضیحی با توجه به شکل و قضیه فیثاغورث داریم

$$(x_۱-h)^۲+(y_۱-k)^۲=S^۲+a^۲ \Rightarrow S^۲=(x_۱-h)^۲+(y_۱-k)^۲-a^۲$$

۳۲. نشان دهید که خط عمود بر دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ در نقطه دلخواه $(x_۱,y_۱)$ از مبدأ می‌گذرد.

حل

$$x^۲+y^۲=a^۲ \Rightarrow ۲x+۲yy'=۰ \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$$

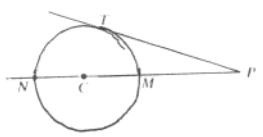
$$m=\frac{-x}{y} \Rightarrow m'=\frac{-۱}{m}=\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y-y_۱=m'(x-x_۱) \Rightarrow y-y_۱=\frac{y_۱}{x_۱}(x-x_۱)$$

$$\Rightarrow y=\frac{y_۱}{x_۱}x$$

یعنی خط از مبدأ می‌گذرد.

۳۳. در شکل ۶.۸ خط PT در نقطه T بر دایره مماس است، و خط ماربر نقاط P و مرکز دایره C، دایره را در نقاط M و N قطع می‌کند، ثابت کنید که $(PM)(PN)=(PT)^۲$



حل مثلثهای PMT و PNT متشابه هستند پس

$$\frac{PN}{PT}=\frac{PT}{PM} \Rightarrow PN.PM=(PT)^۲$$

۳.۸ سهمی

8.3 Parabolas

A parabolas is the set of points in a plane that are equidistant from a given fixed point and fixed line in the plane.

در هر یک از مسائل ۱-۸ رأس V و کانون F یک سهمی داده شده‌اند. معادلات سهمی و هادی آن را بیابید. سپس سهمی را بکشید و کانون رأس و هادی‌اش را مشخص کنید.

۱. $V(۰,۰)$ ،$F(۰,۲)$

حل

$$\begin{cases} p=۲ \Rightarrow x^۲=۴(۲)y \Rightarrow x^۲=۸y & \text{سهمی} \\ y=۰-۲=-۲ & \text{هادی} \end{cases}$$

۲. $V(۰,۰)$ ،$F(-۲,۰)$

حل
$$\begin{cases} y^2=-(4)(2)x \Rightarrow y^2=-8x & \text{سهمی} \\ x=0-(-2)=2 & \text{هادی} \end{cases}$$

۳. $V(0,0)$، $F(0,-4)$

حل
$$\begin{cases} x^2=-4(4)y \Rightarrow x^2=-16y \\ y=4 \end{cases}$$

۴. $V(0,0)$، $F(4,0)$

حل
$$\begin{cases} (y-0)^2=4(4)(x-0) \Rightarrow y^2=16x \\ x=0-4=-4 \end{cases}$$

۵. $V(-2,3)$، $F(-2,4)$

حل
$$\begin{cases} (x+2)^2=4(y-3) & \text{سهمی} \\ y=3-1=2 & \text{هادی} \end{cases}$$

۶. $V(0,3)$، $F(-1,3)$

حل
$$\begin{cases} (y-3)^2=-4(1)(x-0) \Rightarrow (y-3)^2=-4x \\ x=0-(-1)=1 \end{cases}$$

۷. $V(-3,1)$، $F(0,1)$

حل
$$\begin{cases} (y-1)^2=4(3)(x+3) \Rightarrow (y-1)^2=12(x+3) \\ x=-3-3=-6 \end{cases}$$

۸. $V(1,3)$، $F(1,0)$

حل
$$\begin{cases} (x-1)^2=-4(-3)(y-3) \Rightarrow (x-1)^2=12(y-3) \\ y=3-3=0 \end{cases}$$

در هر یک از مسائل ۹-۱۴، رأس و هادی یک سهمی داده شده‌اند. و معادلهٔ سهمی و مختصات کانونش را بیابید. سپس سهمی را بکشید، و کانون، رأس و هادی‌اش را مشخص کنید.

۹. $V(2,0)$، محور y

حل
$$\begin{cases} y^2=8x \\ F(4,0) \quad , \quad P=2 \end{cases}$$

۱۰. $V(1,-2)$، محور x

حل
$$\begin{cases} P=0-(-2)=2 \Rightarrow (x-1)^2=-8(y+2) \\ F(1,-4) \end{cases}$$

۱۱. $V(-3,1)$، خط $x=1$

حل
$$\begin{cases} P=4 \Rightarrow (y-1)^2=-16(x+3) \\ F(-7,1) \end{cases}$$

۱۲. $V(-2,-2)$، خط $y=-3$

حل
$$\begin{cases} P=-2+3=1 \ , \ (x+2)^2=4(1)(y+2) \\ F(-2,-1) \end{cases}$$

۱۳. $V(0,1)$، خط $x=-1$

حل
$$\begin{cases} P=0-(-1)=1 \Rightarrow (y-1)^2=4x \\ F(1,1) \end{cases}$$

۱۴. $V(0,1)$، خط $x=2$

حل
$$\begin{cases} x^2=-4(1)(y-1) \Rightarrow x^2=-4(y-1) \\ F(0,0) \end{cases}$$

در مسائل ۱۵-۲۶، رأس، محور، کانون، و هادی سهمی مفروض را بیابید سپس سهمی را رسم کنید، و این مشخصات را روی شکل نشان دهید.

۱۵. $y^2=8x$

حل
$$\begin{cases} y^2=8x \Rightarrow (y-0)^2=4(2)(x-0) \Rightarrow \\ V(0,0), P=2, F(0,2), y=0 \end{cases}$$

۱۶. $y^2=-36x$

حل
$(y-0)^2=-4(9)(x-0) \Rightarrow P=9$

$F(-9,0)$ و محور $y=0$ هادی $x=9$

۱۷. $x^2=100y$

حل
$V(0,0)$، $F(0,25)$، محور $x=0$، هادی $y=25$

۱۸. $x^2=-9y$

حل
$V(0,0)$، $F(0,-\frac{9}{4})$، محور $x=0$، هادی $y=\frac{9}{4}$

۱۹. $x^2-2x+8y-7=0$

حل
$V(1,1)$ و $F(1,-1)$، محور $x=1$، هادی $y=3$

۲۰. $x^2+8x-4y+4=0$

حل
$(x+4)^2=4(y+3) \Rightarrow$

$V(-4,-3)$، $F(-4,-2)$، هادی $y=-4$، محور $x=-4$

۲۱. $y^2+4y-8=0$

حل
$(y-0)^2=-4(x-2) \Rightarrow$

$V(2,0)$ و $F(1,0)$، هادی $x=3$، محور $y=0$

۲۲. $x^2+8y-4=0$

حل
$(x-0)^2=-8(y-\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$V(0,\frac{1}{2})$، $F(0,\frac{3}{2})$، هادی $y=2/5$، محور $x=0$

۲۳. $x^2+2x-4y-3=0$

حل
$(x+1)^2=4(y+1) \Rightarrow$

$V(-1,-1)$، $F(-1,0)$، هادی $y=-2$، محور $x=-1$

۲۴. $x^2+2x+4y-3=0$

حل
$(x+1)^2=-4(y-1) \Rightarrow$

$V(-1,1)$، $F(-1,0)$، هادی $y=2$، محور $x=-1$

۲۵. $y^2-4y-8x-12=0$

حل
$(y-2)^2=8(x+2) \Rightarrow$

$V(-2,2)$ و $F(0,2)$، هادی $x=-4$، محور $y=2$

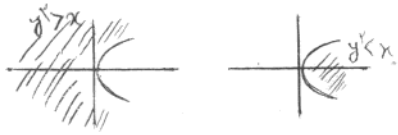
۲۶. $y^2+6y+2x+5=0$

حل
$(y+3)^2=-2(x-2) \Rightarrow$

$V(2,-3)$، $F(1/5,-3)$، هادی $y=2/5$، محور $x=-3$

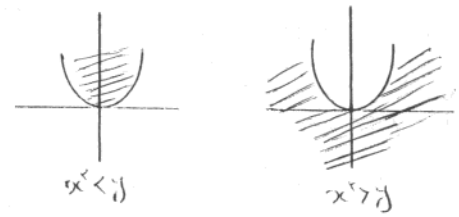
۲۷. چه نواحی از صفحه در نابرابریهای $y^2<x$ و $y^2>x$ صدق می‌کنند؟ شکل بکشید.

حل



۲۸. چه نواحیی از صفحه در نابرابریهای $x^2<8y$ و $x^2>8y$ صدق می‌کنند؟ شکل بکشید.

حل



۲۹. نشان دهید که مماسهایی که از هر نقطه خط $x=-p$ بر خم $y^2=4px$ رسم شوند بر هم عمودند.

حل گیریم $(-p,y_0)$ نقطه‌ای از خط $x=-p$ باشد و (x,y) نقطه تماس خط مماس از این نقطه بر سهمی $y^2=4x$ باشد شیب این خط $y=\frac{y-y_0}{x-(-p)}$ و شیب هر خط مماس بر سهمی $m=\frac{2p}{y}$ می‌باشد. در نقطه تماس این دو شیب برابر هستند پس داریم $\frac{y-y_0}{x+p}=\frac{2p}{y}$، در این معادله به جای x، از معادله سهمی $\frac{y^2}{4p}$ را قرار می‌دهیم داریم

$$\frac{y-y_0}{\frac{y^2}{4p}+p}=\frac{2p}{y}\Rightarrow y(y-y_0)=2p\left(\frac{y^2}{4p}+p\right)$$

$$\Rightarrow y^2-2yy_0-4p^2=0\Rightarrow y=y_0\pm\sqrt{y_0^2+4p^2}$$

داشتیم $y'=\frac{2p}{y}$، حال اگر به جای y، مقادیر فوق را قرار دهیم داریم

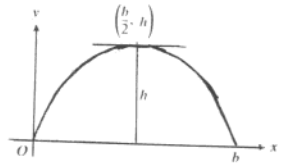
$m=\frac{2p}{y_0+\sqrt{y_0^2+4p^2}}$ و $m'=\frac{2p}{y_0-\sqrt{y_0^2+4p^2}}$، از طرفی $mm'=-1$ یعنی این دو مماس بر هم عمودند.

۳۰. فرمول ارشمیدس در مورد مساحت ناحیه محدود به یک طاق سهموی.

الف) معادله طاق سهموی شکل ۱۶.۸ را که قاعدهٔ آن b و ارتفاع آن h است، بیابید.

ب) نشان دهید که مساحت ناحیه محصور بین این طاق و محور x عبارت است از $(2/3)bh$.

حل (الف)



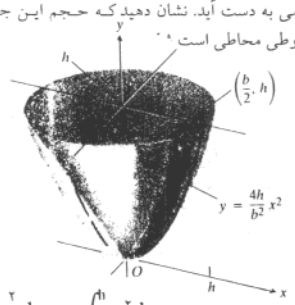
$$(x-\frac{b}{2})^2=-4p(y-h)\xrightarrow{(x,y)=(0,0)}(0-\frac{b}{2})^2=-4p(y-0)$$

$$\Rightarrow\frac{b^2}{4h}=4p\Rightarrow(x-\frac{b}{2})^2=-\frac{b^2}{4h}(y-h)$$

(ب)
$$A=\int_0^b\left[h-\frac{4h}{b^2}(x-\frac{b}{2})^2\right]dx=\frac{2}{3}bh$$

۳۱. فرمول ارشمیدس در مورد حجم یک جسم سهموی. ناحیه محدود به سهمی $y=(4h/b^2)x^2$ و خط $y=h$ را حول محور y دوران می‌دهیم تا جسمی به دست آید. نشان دهید که حجم این جسم ۳/۲ برابر حجم مخروطی محاطی است.

حل



$$V=\pi\int_a^b\left[f(y)\right]^2dy=\pi\int_0^h x^2dy$$

$$=\pi\int_0^h\frac{b^2}{4h}ydy=\frac{\pi b^2h}{8}$$

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(\frac{b^2}{2})h=\frac{\pi b^2h}{12}\Rightarrow\frac{V}{V_1}=\frac{3}{2}$$

۴.۸ بیضی Ellipses

Standard Equations for Ellipses centered at (h,k) with Axes paralle to the coordinate Axes.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(Major axis horizontal)}$$

Vertices : $(h\pm a,k)$, Foci: $\left(h\pm\sqrt{a^2-b^2},k\right)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad \text{(Major axis vertical)}$$

Vertices : $(h,k\pm a)$, Foci: $\left(h,k\pm\sqrt{a^2-b^2}\right)$

In each case, a is the semimajor axis and b is the semiminor axis

در مسائل ۱-۴، مطلوب است معادله بیضی که مرکز آن C، کانون آن F، و نصف قطر بزرگ آن a باشد. سپس خروج از مرکز را محاسبه و بیضی را رسم کنید.

۱. $C(0,0)$, $F(0,2)$, $a=4$

حل $c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=16-4=12\Rightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

۲. $C(0,0)$, $F(-3,0)$, $a=5$

حل $b^2=25-9=16\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

۳. $C(0,2)$, $F(0,0)$, $a=3$

حل $b^2=9-4=5\Rightarrow\frac{x^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ و $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$

۴. $C(-۳,۰),\ F(-۳,-۲),\ a=۴$

حل: $e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{(x+۳)^۲}{۱۲}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱ \Rightarrow b^۲=۱۶-۴=۱۲$

مرکز، رأسها و کانون‌های بیضیهای مسائل ۵ـ۱۸ را بیابید.

۵. $\frac{(x-۷)^۲}{۴}+\frac{(y-۵)^۲}{۲۵}=۱$

حل:

$$\begin{cases} a^۲=۲۵\Rightarrow a=۵ \\ b^۲=۴\Rightarrow b=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(۷,۵)=c(h,k) & \text{مرکز} \\ (۷,۵\pm۵)=(h,k\pm a) & \text{رأس‌ها} \\ (۷,۵\pm\sqrt{۲۱})=(h,k\pm\sqrt{a^۲-b^۲}) & \text{کانونها} \end{cases}$$

۶. $\frac{(x+۳)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱$

حل: $a^۲=۱۶\Rightarrow a=۴,\ b^۲=۴\Rightarrow b=۲\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-۳,۱) \\ v(h\pm a,k)=v(-۳\pm۴,۱) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(-۳\pm۲\sqrt{۳},۱) \end{cases}$$

۷. $\frac{(x+۱)^۲}{۹}+\frac{(y+۴)^۲}{۲۵}=۱$

حل: $a^۲=۲۵\Rightarrow a=۵, b^۲=۹\Rightarrow b=۳\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-۱,-۴) \\ v(h,k\pm a)=v(-۱,-۴\pm۵) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^۲-b^۲})=F(-۱,-۴\pm۴) \end{cases}$$

۸. $\frac{(x-۸)^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۸۱}=۱$

حل: $a^۲=۸۱\Rightarrow a=۹, b^۲=۲۵\Rightarrow b=۵\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۸,۰) \\ v(h,k\pm a)=v(۸,۰\pm۹) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^۲-b^۲})=F(۸,۲\sqrt{۱۴}) \end{cases}$$

۹. $۲۵(x-۳)^۲+۴(y-۱)^۲=۱۰۰$

حل: $a^۲=۲۵\Rightarrow a=۵,\ b^۲=۴\Rightarrow b=۲\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۳,۱) \\ v(h,k\pm a)=v(۳,۱\pm۵) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^۲-b^۲})=F(۳,۱\pm\sqrt{۲۱}) \end{cases}$$

۱۰. $۹(x-۴)^۲+۱۶(y-۳)^۲=۱۴۴$

حل: $a^۲=۱۶,\ b^۲=۹,\ a=۴,\ b=۳\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۴,۳) \\ v(h\pm a,k)=v(۴\pm۴,۳) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(۴\pm\sqrt{۷},۳) \end{cases}$$

۱۱. $x^۲+۱۰x+۲۵y^۲=۰$

حل: $\frac{(x+۵)^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۱}=۱\Rightarrow a=۵,\ b=۱\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-۵,۰) \\ v(h\pm a,k)=v(-۵\pm۵,۰) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(-۵\pm\sqrt{۲۴},۰) \end{cases}$$

۱۲. $x^۲+۱۶y^۲+۹۶y+۱۲۸=۰$

حل: $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{(y+۳)^۲}{۱}=۱\Rightarrow a=۴,\ b=۱\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۰,-۳) \\ v(h\pm a,k)=v(۰\pm۴,-۳) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(\pm\sqrt{۱۵},-۳) \end{cases}$$

۱۳. $x^۲+۹y^۲-۴x+۱۸y+۴=۰$

حل: $\frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y+۱)^۲}{۱}=۱\Rightarrow a=۳,\ b=۱\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۲,-۱) \\ v(h\pm a,k)=v(۲\pm۳,-۱) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(۲\pm۲\sqrt{۲},-۱) \end{cases}$$

۱۴. $۴x^۲+y^۲-۳۲x+۱۶y+۱۲۴=۰$

حل: $\frac{(x-۴)^۲}{۱}+\frac{(y+۸)^۲}{۴}=۱\Rightarrow a=۲,\ b=۱\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۴,-۸) \\ v(h,k\pm a)=v(۴,-۸\pm۲) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^۲-b^۲})=F(۴,-۸\pm\sqrt{۳}) \end{cases}$$

۱۵. $۴x^۲+y^۲-۱۶x+۴y+۱۶=۰$

حل: $\frac{(x-۲)^۲}{۱}+\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱\Rightarrow a=۲,\ b=۱\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(۲,-۲) \\ v(h,k\pm a)=v(۲,-۲\pm۲) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^۲-b^۲})=F(۲,-۲\pm\sqrt{۳}) \end{cases}$$

۱۶. $x^۲+۴y^۲+۲x+۸y+۱=۰$

حل: $\frac{(x+۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۱}=۱\Rightarrow a=۲,\ b=۱\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-۱,-۱) \\ v(h\pm a,k)=v(-۱\pm۲,-۱) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(-۱\pm\sqrt{۳},-۱) \end{cases}$$

۱۷. $۹x^۲+۱۶y^۲+۱۸x-۹۶y+۹=۰$

حل: $\frac{(x+۱)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱\Rightarrow a=۴,\ b=۳\Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-۱,۳) \\ v(h\pm a,k)=v(-۱\pm۴,۳) \\ F(h\pm\sqrt{a^۲-b^۲},k)=F(-۱\pm\sqrt{۷},۳) \end{cases}$$

۱۸. $۲۵x^۲+۹y^۲-۱۰۰x+۵۴y-۴۴=۰$

حل $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1 \Rightarrow a=5,\ b=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(2,-3) \\ v(h,k\pm a)=v(2,-3\pm 5) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^2-b^2})=F(2,-3\pm 4) \end{cases}$$

۱۹. بیضیهای زیر را رسم کنید

الف) $9x^2+4y^2=36$ ب) $4x^2+9y^2=144$،

پ) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(x+2)^2}{4}=1$ ت) $4x^2+y^2=1$

ث) $16(x-2)^2+9(y+3)^2=144$

حل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$

$(x,y)=(0,0)\Rightarrow b^2=1\Rightarrow b=1, a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$

مرکز بیضی وسط کانونهایش یعنی (۰،۱) است و خروج از مرکز $c=1$ است پس داریم.

۲۰. نقاط انتهایی قطرهای بزرگ و کوچک یک بیضی عبارت اند از (۱،۱)، (۳،۴)، (۱،۷)، (۱،۴-) بیضی را رسم کنید، معادلهٔ آن را بیابید، و کانونهایش را پیدا کنید.

حل
$$\begin{cases} 2a=6\Rightarrow a=2, 2b=4\Rightarrow b=2 \\ c(h,k)=c(1,4)\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1 \\ F(h,k\pm\sqrt{a^2-b^2})=F(1,4\pm\sqrt{5}) \end{cases}$$

۲۱. خروج از مرکز یک بیضی ۲/۳ است، خط $x=9$ یکی از هادیها، و نقطه (۴،۰) کانون متناظر آن هادی است. معادله‌ای برای این بیضی بیابید.

حل $PF=\sqrt{(x-4)^2+y^2},\ PD=|x-9|$

$\frac{PF}{PD}=e\Rightarrow\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\frac{2}{3}|x-9| \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

۲۲. یک بیضی با خروج از مرکز ۴/۵ رسم کنید.

حل $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\Rightarrow c=\frac{16}{25}a^2$

$b^2=a^2-c^2=a^2-\frac{16}{25}a^2=\frac{9}{25}a^2\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{25}\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

۲۳. مطلوب است ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت که بتواند درون بیضی $x^2+2y^2=4$ جاگیرد و اضلاعش با محورهای مختصات موازی باشند. مساحت این مستطیل چقدر است؟

حل $A(x)=2(x)\sqrt{4-x^2}$

$A'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow A(\sqrt{2})=4$

۲۴. مرکز جرم ورق همگن نازکی را بیابید که از پایین به محور x، و از بالا بیضی $(x^2/9)+(y^2/16)=1$ محدود باشد.

حل $M=\int_{-3}^{3}4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx=\frac{8}{3}\int_{0}^{3}\sqrt{1-x^2}\,dx=6\pi$

$M_x=\int_{-3}^{3}\frac{4}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx=32$

بنابر تقارن $\bar{x}=0$ است $\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{32}{6\pi}=\frac{16}{3\pi}$

۲۵. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به بیضی $(x^2/4)+(y^2/9)=1$ حول (الف) محور x (ب) محور y.

حل a) $v=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{-2}^{2}9(1-\frac{x^2}{4})dx=24\pi$

b) $v=\pi\int_a^b\left[f(y)\right]^2dy=\pi\int_{-3}^{3}4(1-\frac{y^2}{4})dy=16\pi$

۲۶. به ازای چه مقادیر ثابت a، b، c بیضی $4x^2+y^2+ax+by+c=0$ در مبدأ بر محور x مماس است و از نقطه (۱،۲-) می‌گذرد؟

حل $(x,y)=(0,0)\Rightarrow c=0,$

$(x,y)=(-1,2)\Rightarrow -a+2b-8=0$

از طرفی بیضی در مبدأ بر محور x مماس است. یعنی مرکز آن روی محور y ها قرار دارد بنابراین $a=0$ و $b=-4$ می‌گردد پس داریم. $4x^2+y^2-4y=0$

۵.۸ هذلولی Hyperbolas

Standard Equations for Hyperbolas centered at (h,k) with Axes parallel to the coordinate Axes.

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (Line of foci parallel to x - axis)

Vertice : $(h\pm a,k)$

Foci : $(h\pm\sqrt{a^2+b^2},k)$

Asymptotes : $(y-k)=\pm(\frac{b}{a})(x-h)$

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (Line of foci parallel to y - axis)

Vertice : $(h,k\pm a)$

Foci : $(h,k\pm\sqrt{a^2+b^2})$

Asymptotes : $(y-k)=\pm(\frac{a}{b})(x-h)$

در مسائل ۱-۴ هذلولی و مجانبهای آن را رسم کنید.

۱. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

حل $y=\pm\frac{4}{3}x$ معادله مجانب‌ها است

۲. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

حل $y=\pm\frac{3}{4}x$ معادله مجانبها است.

۳. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

حل $y=\pm\frac{3}{4}x$ معادله مجانبها است.

۴. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

حل $y=\pm\frac{4}{3}x$ معادله مجانبها است.

در مسائل ۵-۱۴، مرکز، رأسها، کانون‌ها، خروج از مرکز، و مجانبهای هذلولی داده شده را بیابید. سپس هذلولی را رسم کنید و در آن این مشخصات را نشان دهید.

۵. $9(x-2)^2-4(y+3)^2=36$

حل $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1,\ a=2,\ b=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(2,-3) \\ v(h\pm a,k)=v(2\pm 2,-3) \\ F(h\pm\sqrt{a^2+b^2},k)=F(2\pm\sqrt{13},-3) \end{cases}$$

$y+3=\pm\frac{3}{2}(x-4),\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13},\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

۶. $x^2-9(y-1)^2=9$

حل $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{1}=1,\ a=3,\ b=1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(0,1) \\ v(h\pm a,k)=v(0\pm 3,1) \\ F(h\pm\sqrt{a^2+b^2},k)=F(\pm\sqrt{10},1) \end{cases}$$

$y-k=\pm(\frac{b}{a})(x-h) \Rightarrow y-1=\pm 3x$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10},\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

۷. $4(x-2)^2-9(y+3)^2=36$

حل $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1 \Rightarrow a=3,\ b=2$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(2,-3) \\ v(h\pm a,k)=v(2\pm 3,-3) \\ F(h\pm\sqrt{a^2+b^2},k)=F(2\pm\sqrt{13},-3) \end{cases}$$

$y+3=\pm(\frac{2}{3})(x-2),\ c=\sqrt{13},\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

۸. $(y+3)^2-9(x-2)^2=9$

حل $\frac{(y+3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{1}=1 \Rightarrow a=3, b=1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(2,-3) \\ v(h,k\pm a)=v(2,-3\pm 3) \\ F(h,k\pm\sqrt{a^2+b^2})=F(2,3\pm\sqrt{10}) \end{cases} \Rightarrow$$

$y+3=\pm(x-2),\quad e=\frac{c}{a}=\sqrt{10}$

۹. $16(y-3)^2-9(x-4)^2=144$

حل $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-4)^2}{16}=1 \Rightarrow a=4, b=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(4,3) \\ v(h,k\pm b)=v(4,3\pm 3) \\ F(h,k\pm c)=F(4,3\pm 5) \end{cases} \Rightarrow$$

$e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3},\ y-3=\pm\frac{3}{4}(x-4)$

۱۰. $y^2-(x+2)^2=8$

حل $\frac{y^2}{8}-\frac{(x+2)^2}{8}=1 \Rightarrow a=b=2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-2,0) \\ v(h,k\pm a)=v(-2,\pm 2\sqrt{2}) \\ F(h,k\pm c)=F(-2,0\pm 4) \end{cases}$$

$y=\pm(x+2),\ e=\frac{c}{a}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

۱۱. $5x^2-4y^2+20x+8y=4$

حل $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1 \Rightarrow b=\sqrt{5},\ a=2$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(-2,1) \\ v(h\pm a,k)=v(-2\pm 2,1) \\ F(h\pm c,k)=F(-2\pm 3,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$y-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+2),\ e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$

۱۲. $4x^2=y^2-4y+8$

حل $\frac{x^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{4}=1 \Rightarrow a=1,\ b=2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(0,2) \\ v(h\pm a,k)=v(0\pm 1,2) \\ F(h\pm c,k)=F(\pm\sqrt{5},2) \end{cases}$$

$y-2=\pm 2x,\ c=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{1}$

۱۳. $4y^2=x^2-4x$

حل $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a=2,\ b=1$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(2,0) \\ v(h\pm a,k)=v(2\pm 2,0) \\ F(h\pm c,k)=F(2\pm\sqrt{5},0) \end{cases}$$

$y=\pm\frac{1}{2}(x-2),\ c=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\ e=\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۴. $4x^2-5y^2-16x+10y+31=0$

حل $\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=1 \Rightarrow a=2,\ b=\sqrt{5}$

$$\begin{cases} c(h,k)=c(2,10) \\ v(h,k\pm a)=v(2,1\pm 2) \\ F(h,k\pm c)=F(2,1\pm 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$y-1=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(x-2),\ e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$

۱۵. معادله‌ای برای هذلولیی با کانون‌های $(0,0)$ و $(0,4)$ بنویسید که از نقطه $(12,9)$ می‌گذرد.

حل مرکز وسط کانونهاست پس $c(0,2)$ است یعنی $\frac{(y-2)^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ از طرف $(12,9)$ روی هذلولوی است پس داریم $\frac{49}{a^2}-\frac{144}{b^2}=1$ و چون $c=2$ پس $a^2+b^2=4$ و بنابراین $a^2=1$ و $b^2=3$ در این صورت داریم $\frac{(y-2)^2}{1}-\frac{x^2}{3}=1$ جواب مورد نظر است.

۱۶. یکی از کانون‌های یک هذلولی در نقطه $(1,-3)$ است و هادی مربوط به آن خط $y=2$ است. اگر خروج از مرکز این هذلولی ۳/۲ باشد، معادله‌ای برای

آن بنویسید.

حل $PF=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}\ ,\ PD=|y-2|$

$\frac{PF}{PD}=e\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=\frac{3}{2}|y-2|\Rightarrow 4x^2-5y^2-8x-60y+4=0$

۱۷. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین خط $x=5$ و شاخهٔ راست هذلولی $x^2-y^2=a$ حول محور (الف) x (ب) y.

حل a) $v=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_3^5(x^2-9)dx=\frac{44\pi}{3}$

b) $v=\pi\int_a^b\left[f(y)\right]^2dy=\pi\int_{-4}^4(25-(9-y^2)dy=\frac{256\pi}{3}$

۱۸. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین هذلولی $x^2-y^2=1$ و خطوط $y=-3$ و $y=3$ حول محور (الف) x (ب) y.

حل a) $v=2\pi\int_a^b xf(y)dy=2\pi\int_0^3 2xydy=4\pi\int_0^3 y\sqrt{1+y^2}\,dy$

b) $v=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{-3}^3(1+y^2)dy=24\pi$

۱۹. ناحیه محصور بین شاخه راست هذلولی $3x^2-4y^2=12$ و خط $x=5$ را حول محور y دوران می‌دهیم و جسمی را به دست می‌آوریم. حجم این جسم را بیابید.

حل $x=5\Rightarrow 3(5)^2-4y^2=12\Rightarrow y=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow v=\pi\int_{-\frac{3\sqrt{7}}{2}}^{\frac{3\sqrt{7}}{2}}(25-x^2)dy=2\int_0^{\frac{3\sqrt{7}}{2}}(5-(4+\frac{4}{3}y^2))dy=42\pi\sqrt{7}$

۲۰. مطلوب است مرکز جرم ورق نازک همگنی که از چهار راست به هذلولی $x^2-y^2=9$ از پایین به محور x و از بالا به خط $y=4$ محدود است.

حل $M=\int_0^4 2xdy=2\int_0^4\sqrt{9+y^2}\,dy$

$=2\int_0^{\tan^{-1}(\frac{4}{3})}3\sqrt{9(1+\tan^2u)}\sec^2udu$

$=18\int_0^{\tan^{-1}(\frac{4}{3})}\sec^3udu=9\left[\sec u\tan u+\ln|\sec u+\tan u|\right]_0^{\tan^{-1}(\frac{4}{3})}$

$M_y=\int_0^4 2xydy=2\int_0^4 y\sqrt{9+y^2}\,dy=\frac{2}{3}\left(9+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$

۶.۸ نمودار معادلات درجه دوم

The Graphs of Quadratic Equtions

در مسائل ۱-۱۰ با دوران دادن محورهای مختصات معادلهٔ مفروض را به معادله‌ای تبدیل کنید که جمله xy نداشته باشد. آنگاه نمودار معادله را مشخص کنید (معادلات جدید به اندازه و جهت دورانی بستگی دارند که انتخاب می‌کنید)

۱. $xy=2$

حل $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\Rightarrow$

$\left\{\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{B}{A-C})\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{array}\right.$

$a=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{2}{0-0})=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{l}x=x'\cos(\frac{\pi}{4})-y'\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\\ y=y'\sin(\frac{\pi}{4})+y'\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\end{array}\right.$

$xy=2\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y').\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=2\Rightarrow x'^2-y'^2=$ (هذلولی)

۲. $x^2+xy+y^2=1$

حل $\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{1}{1-1})=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$

$A=B=C=1$ و $D=E=0,\ F=1\Rightarrow$

$A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}$

$B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin^2\alpha=0+(1-1)1=0$

$C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\frac{3}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2=1$ (بیضی)

۳. $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-8x+8\sqrt{3}y=0$

حل $A=3, B=2\sqrt{3}, C=1, D=-8, E=8\sqrt{3}, F=0$

$\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3-1}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$

$A'=A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha$

$=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\sqrt{3}(\frac{1}{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=4$

$B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin2\alpha=2\sqrt{3}(\frac{1}{2})-(1-3)(\frac{\sqrt{3}}{2})=0$

$C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=3(\frac{1}{2})^2-2\sqrt{3}(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})$

$+(\frac{\sqrt{3}}{2})=0$

$D'=D\cos\alpha+E\sin\alpha=-8(\frac{\sqrt{3}}{2})+8\sqrt{3}(\frac{1}{2})=0$

$E'=-D\sin\alpha+E\cos\alpha=8(\frac{1}{2})+8\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})=16$

$F'=F=0\Rightarrow 4x'^2+16y'=0$ (سهمی)

۴. $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=1$

حل $A=1, B=-\sqrt{3}, C=2, D=E=0, F=1\Rightarrow$

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1-2}\right)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$A'=A\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin2\alpha=-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)+(2-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{5}{2},\ F'=F=1\Rightarrow\frac{1}{2}x'^2+\frac{5}{2}y'^2=1 \quad \text{(بیضی)}$$

۵. $x^2-2xy+y^2=2$

حل $A=1,\ B=-2,\ C=1,\ D=E=0,\ F=2$

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0 \text{ و } B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin2\alpha=-2(0)+(0)1=0$$

$$C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2,\ F=F'=2\Rightarrow 2y'^2=2\Rightarrow y=\pm1$$

۶. $x^2-3xy+y^2=5$

حل $A=1,B=-3,C=1,D=E=0,F=5\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-3}{1-1}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$A'^2=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2} \text{ و } B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin2\alpha=$$

$$-3(0)+(1-1)(1)=0,\ C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

$$F=F'=5\Rightarrow\frac{-1}{2}x'^2+\frac{5}{2}y'^2=5\Rightarrow5y'^2-x'^2=10 \quad \text{(هذلولی)}$$

۷. $\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}xy+\sqrt{2}y^2-8x+8y+4\sqrt{2}=0$

حل $A=\sqrt{2},\ B=2\sqrt{2},\ C=\sqrt{2},\ D=-8,\ E=8,\ F=-4\sqrt{2}$

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+$$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\sqrt{2}$$

$$B'=0,\ C'=0,\ D'=D\cos\alpha+E\sin\alpha=-8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$E'=-D\sin\alpha+E\cos\alpha=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8\sqrt{2}$$

$$F'=F=-4\sqrt{2}\Rightarrow2\sqrt{2}x'^2+8\sqrt{2}y'-4\sqrt{2}=0\Rightarrow x'^2=-4\left(y'+\frac{1}{2}\right) \quad \text{(سهمی)}$$

۸. $xy-y-x+1=0$

حل $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ یک خط قائم

۹. $3x^2+2xy+3y^2=19$

حل $4x'^2+2y'^2=19$ (بیضی)

۱۰. $3x^2+4\sqrt{3}xy-y^2=7$

حل $5x'^2-3y'^2=7$ (هذلولوی)

۱۱. سینوس و کسینوس زاویه‌ای را بیابید که اگر محورهای مختصات به اندازه آن دوران کنند جمله xy از معادلهٔ زیر حذف می‌شود.

$14x^2+16xy+2y^2-10x+26{,}370y-17=0$ دوران را انجام ندهید.

حل $A=14,B=16,C=2\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{16}{12}\right)$

۱۲. $F_1(-1,0)$ و $F_2(0,\sqrt{3})$ کانونهای یک بیضی هستند و این بیضی از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد. (با استفاده ازتعریف) معادله‌ای برای این بیضی بنویسید. سپس زاویه‌ای چون α بیابید که اگر محورهای مختصات به اندازهٔ آن دوران کنند، معادلهٔ حاصل فاقد جملهٔ xy باشد. اما دوران را انجام ندهید.

حل گیریم $P(x,y)$ یک نقطه دلخواه از بیضی باشد پس داریم.

$$|PF_1|+|PF_2|=2a\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}=2a$$

نقطه $(1,0)$ متعلق به بیضی است پس

$$\sqrt{(1+1)^2+0^2}+\sqrt{1^2+(0-\sqrt{3})^2}=2a\Rightarrow2+2=2a\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}=4$$

۱۳. نشان دهید که در معادلات دورانی، زاویهٔ α هر چه باشد معادله $x^2+y^2=a^2$ به صورت $x'^2+y'^2=a^2$ در می‌آید.

حل راهنمایی: کافی است در معادله $x^2+y^2=a^2$ به جای x، $x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$ و به جای y، $x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ قرار دهید و آنرا ساده کنید.

۱۴. نشان دهید که هرگاه در معادله (۱) داشته باشیم $A=C$ با دوران محورها به اندازه زاویه $\pi/4$ رادیان، جمله xy از معادله حذف می‌شود.

حل $A=C\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-A}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

$$B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin2\alpha=B(0)-(C-C)(1)=0$$

یعنی ضریب جمله xy حذف می‌گردد.

۱۵. مطلوب است معادلهٔ خم $x^2+2xy+y^2=1$ پس از دوران محورها، چنانکه A' مذکور در معادلهٔ (۶) صفر شود.

حل با توجه به تمرین قبل $B'=0$ و $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$$A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2 \text{ و } C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0,\ F'=F=1\Rightarrow2x'^2=1\Rightarrow x'=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷.۸ سهمی، بیضی یا هذلولی؟ مبین پاسخ می‌دهد

Parabola, Ellipse, or Hyperbola? The Discriminant Tells

در مسائل ۱-۱۷ به کمک مبین تعیین کنید که معادلهٔ مفروض دایره است، یا

سهمی، یا بیضی، و یا هذلولی.

۱. $x^2-y^2-1=0$

حل (هذلولوی) $A=1, B=0, C=-1, \Delta=B^2-4AC=4>0$

۲. $25x^2+9y^2-225=0$

حل (بیضی) $\Delta=B^2-4AC=0-4(25)(9)=-900<0$

۳. $y^2-4x-4=0$

حل $\Delta=0$ سهمی

۴. $x^2+y^2-10=0$

حل $\Delta=B^2-4AC=-4<0$ بیضی

۵. $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$

حل $\Delta=-16<0$ بیضی

۶. $x^2+y^2+xy+x-y=3$

حل $\Delta=-3<0$ بیضی

۷. $2x^2-y^2+4xy-2x+3y=6$

حل $\Delta=24>0$ هذلولوی

۸. $x^2+2xy+2y^2-3x=6$

حل $\Delta=0$ سهمی

۹. $x^2+y^2+3x-2y=10$

حل $\Delta=-4<0$ بیضی

۱۰. $xy+y^2-3x=5$

حل $\Delta=1>0$ هذلولوی

۱۱. $3x^2+6xy+3y^2-4x+5y=12$

حل $\Delta=0$ سهمی

۱۲. $x^2-y^2=1$

حل $\Delta=4>0$ هذلولوی

۱۳. $2x^2+3y^2-4x=7$

حل $\Delta=-24<0$ بیضی

۱۴. $x^2-3xy+3y^2+6y=7$

حل $\Delta=-3<0$ بیضی

۱۵. $25x^2-4y^2-350x=0$

حل $\Delta=400>0$ هذلولوی

۱۶. $6x^2+3xy+2y^2+17y+2=0$

حل $\Delta<0$ بیضی

۱۷. $3x^2+12xy+12y^2+435x-9y+72=0$

حل $\Delta=0$ سهمی

۱۸. یک فرمول جالب برای مساحت بیضی. وقتی B^2-4AC منفی باشد، خم $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ بیضی است. اگر نصف قطرها a و b باشند مساحت این بیضی πab است. نشان دهید مساحت این بیضی از فرمول $2\pi/\sqrt{4AC-B^2}$ نیز به دست می‌آید. (راهنمایی: محورهای را مختصات را دوران دهید تا جمله xy حذف شود، سپس معادلهٔ ۴ را در مورد معادلهٔ جدید به کار ببرید.)

حل طبق راهنمایی پس از حذف جمله xy معادله $Ax^2+Byx+Cy^2=1$ به صورت $A'x'^2+C'y'^2=1$ در می‌آید، یا به صورت $\frac{x'^2}{\frac{1}{A'}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{C'}}=1$، پس داریم $s=\pi ab$ یا $S=\frac{\pi}{\sqrt{A'}\sqrt{C'}}$ اما داریم $B^2-4AC=B'^2-4A'C'$ و از طرفی $B'=0$ پس $A'C'=\frac{1}{4}(4AC-B^2)$ حال در فرمول بدست آمده، معادل $A'C'$ را جایگذاری کنید داریم:

$$S=\frac{\pi}{\sqrt{A'C'}}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}(4AC-B^2)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$$

۱۹. با استفاده از معادلات (۶) در بخش ۶.۸ نشان دهید که به ازای هر زاویه دوران α، $D'^2+E'^2=D^2+E^2$

حل $D'=D\cos\alpha+E\sin\alpha,\ E'=-D\sin\alpha+E\cos\alpha \Rightarrow$

$$D'^2+E'^2=(D\cos\alpha+E\sin\alpha)^2+(E\cos\alpha-D\sin\alpha)^2$$
$$=D^2\cos^2\alpha+2DE\cos\alpha\sin\alpha+E^2\sin^2\alpha$$
$$+E^2\cos^2\alpha-2DE\sin\alpha\cos\alpha+D^2\sin^2\alpha$$
$$=D^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+E^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=D^2+E^2$$

۲۰. اگر در معادله (۱) داشته باشیم $C=-A$، نشان دهید دوران خاصی از محورها وجود دارد به قسمی که در معادلهٔ حاصل، معادلهٔ ۳، داشته باشیم $A'=C'=0$. در این حالت زاویهٔ α زاویه دوران را بیابید. (راهنمایی: چون $A'+C'=0$ کافی است در معادله (۳)، A' را مساوی صفر قرار دهید)

حل $A'=0\Rightarrow A^2\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=0$

$$A=-C\Rightarrow A(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\frac{B}{2}\sin 2\alpha=0\Rightarrow A\cos 2\alpha$$
$$+\frac{B}{2}\sin 2\alpha=0\Rightarrow \tan 2\alpha=\frac{-2A^2}{B}$$

۲۱. اثبات رابطه (۴) برای اینکه نشان دهید به ازای هر دورانی از محورها داریم $B'^2-4A'C'=B^2-4AC$ از معادلات (۶) در بخش ۶.۸ استفاده کنید. (محاسبات با شکیبایی به نتیجه می‌رسند.)

حل
$$\begin{cases}A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha\\ C'=A\sin^2\alpha-B\cos\alpha\sin\alpha+C\cos^2\alpha\end{cases}\Rightarrow$$

$$A'+C'=A+C,\ A'-C'=(A-C)\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-(A-C)\sin^2\alpha=(A-C)\cos 2\alpha+B\sin 2\alpha\Rightarrow(A'-C')^2$$
$$=(A-C)^2\cos^2 2\alpha+2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha+B^2\sin^2 2\alpha$$
$$B'=B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha\Rightarrow B'^2=B^2\cos^2 2\alpha$$
$$-2B(A-C)\cos 2\alpha\sin 2\alpha+(A-C)^2\sin^2 2\alpha\Rightarrow(A'-C')^2+B'^2$$
$$=(A-C)^2\cos\alpha^2 2\alpha+B(A-C)\sin 2\alpha+B^2\sin^2 2\alpha+B^2\cos^2 2\alpha$$
$$-B(A-C)\sin 2\alpha+(A-C)^2\sin^2 2\alpha=(A-C)^2+B^2$$

$$\begin{cases}A'+C'=A+C\Rightarrow(A'+C')^2=(A+C)^2\\ (A-C)^2+B^2=(A'-C')^2+B'^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A'^2+2A'C'+C'^2=A^2+2AC+C^2\\ A'^2-2A'C'+C'^2+B'^2=A^2-2AC+C^2+B^2\end{cases}$$

دو رابطه فوق را از هم کم کنید داریم.

$B'^2-4A'B'=B^2-4AC$

۹.۸ معادلات پارامتری مقاطع مخروطی و خمهای دیگر

Parametric Equations of Concis and other Curves.

Standard Parametric Equations

$$\text{Circle}: x^2+y^2=a^2: \begin{cases} x=a\text{Cos}t \\ y=a\text{Sin}t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\text{Ellipse}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1: \begin{cases} x=a\text{Cos}t \\ y=a\text{Sin}t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

Cycloid : $x=a(t-\text{Sin}t),\ y=a(1-\text{Cos}t)$

در مسائل ۱ـ۱۶، خم حاصل از حرکت نقطه $P(x,y)$ را با این فرض که پارامتر t بر دامنهٔ مفروض تغییر می‌کند، رسم کنید. معادلهٔ دکارتی هر خم را نیز بیابید.

۱. $x=\text{Cos}t,\ y=\text{Sin}t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل (دایره) $x^2+y^2=\text{Cos}^2t+\text{Sin}^2t=1$

۲. $x=\text{Cos}2t,\ y=\text{Sin}2t,\ 0\le t\le \pi$

حل (دایره) $x^2+y^2=\text{Cos}^2 2t+\text{Sin}^2 2t=1$

۳. $x=4\text{Cos}t,\ y=2\text{Sin}t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل (بیضی) $\text{Cos}t=\frac{x}{4},\quad \text{Sin}t=\frac{y}{2}\Rightarrow \text{Cos}^2t+\text{Sin}^2t=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

۴. $x=4\text{Cos}t,\ y=5\text{Sin}t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل (بیضی) $\text{Cos}^2t+\text{Sin}^2t=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

۵. $x=\text{Cos}2t,\ y=\text{Sin}t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل (سهمی) $\begin{cases} x=\text{Cos}2t=1-\text{Sin}^2t \\ y=\text{Sin}t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1-y^2 \\ |x|\le 1,\ |y|\le 1 \end{matrix}$

۶. $x=\text{Cos}t,\ y=\text{Sin}2t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل $\begin{cases} y=\text{Sin}2t=2\text{Sin}t\text{Cos}t \\ \text{Sin}t=\sqrt{1-\text{Cos}^2t},\ \text{Cos}t=x \end{cases} \Rightarrow y=2x\sqrt{1-x^2}$

۷. $x=\sec t,\ y=\tan t,\ -\pi/2<t<\pi/2$

حل شاخه چپ هذلولوی $x^2-y^2=\sec^2t-\tan^2t=1$

۸. $x=\csc t,\ y=\cot t,\ 0<t<\pi$

حل شاخهٔ راست هذلولوی $x^2-y^2=\csc^2t-\cot^2t=1$

۹. $x=t-\text{Sin}t,\ y=1-\text{Cos}t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل $\text{Cos}t=1-y \Rightarrow t=\text{Cos}^{-1}(1-)$

$x=t-\text{Sin}t\Rightarrow x=\text{Cos}^{-1}(1-y)-\text{Sin}(\text{Cos}^{-1}(1-y))$

$=\text{Cos}^{-1}(1-y)-\sqrt{1-(1-y)^2}=\text{Cos}^{-1}(1-y)-\sqrt{2y-y^2}$

۱۰. $x=2+4\text{Sin}t,\ y=3-2\text{Cos}t,\ 0\le t\le 2\pi$

حل $\text{Cos}t=\frac{y-3}{2},\ \text{Sin}t=\frac{x-2}{4}\Rightarrow \text{Cos}^2t+\text{Sin}^2t$

$=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

۱۱. $x=t^3,\ y=t^2,\ -\infty<t<\infty$

حل $x=t^3\Rightarrow t=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y=t^2=x^{\frac{2}{3}}$

۱۲. $x=2t+3,\ y=4t^2-9,\ -\infty<t<\infty$

حل $t=\frac{x-3}{2}\Rightarrow y=4(\frac{x-3}{2})^2-9$

۱۳. $x=\sec^2t-1,\ y=\tan t,\ -\pi/2\le t\le \pi/2$

حل $x=\sec^2t-1=\tan^2t=y^2 \Rightarrow x=y^2$

۱۴. $x=2+1/t,\ y=2-t,\ 0<t<\infty$

حل $x=1+\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x-2}\Rightarrow y=2-\frac{1}{x-2}=\frac{2x-5}{x-2}$

$t>0$ پس شاخه راست، هذلولوی می‌باشد.

۱۵. $x=t+1,\ y=t^2+2,\ 0\le t<\infty$

حل $y=(x-1)^2+2,\ x\ge 1$

۱۶. $x=t^2+t,\ y=t^2-t,\ -\infty<t<\infty$

حل $x-y=t^2+t-t^2+t=2t\Rightarrow t=\frac{x-y}{2}\Rightarrow y=(\frac{x-y}{2})^2-\frac{x-y}{2}$

۱۷. معادلات پارامتری نیمدایرهٔ $x^2+y^2=a^2,\ y>0$ را بیابید، پارامتر را شیب $(t=dy/dx)$ مماس بر خم در (x,y) بگیرید.

حل $2x+2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{-x}{y}=t\Rightarrow x=-yt\Rightarrow (yt)^2+y^2=a^2$

$$\Rightarrow y^2(1+t^2)=a^2\Rightarrow y=\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\Rightarrow x=\frac{-at}{\sqrt{1+t^2}}$$

۱۸. معادلات پارامتری دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ را بیابید، پارامتر را طول قوس s از نقطه $(a,0)$ تا نقطه (x,y) (در خلاف جهت ساعت) بگیرید.

حل $x^2+y^2=a^2\Rightarrow \begin{cases} x=a\text{Cos}\theta \\ y=a\text{Sin}\theta \end{cases},\ 0\le\theta\le 2\pi$

$$\theta=\frac{s}{a}\Rightarrow \begin{cases} x=a\text{Cos}(\frac{s}{a}) \\ y=a\text{Sin}(\frac{s}{a}) \end{cases}$$

۱۹. بر سهمی $x=t$، $y=t^2$ نقطه‌ای بیابید که نزدیکترین نقطه ممکن به نقطه $(2,1/2)$ باشد.

حل $x=t,\ y=t^2 \Rightarrow y=x^2$ و $d(x)=(x-2)^2+(y-\frac{1}{2})^2=$

$(x-2)^2+(x^2-\frac{1}{2})^2\Rightarrow d'(x)=2(x-2)+4x(x^2-\frac{1}{2})$

$d'(x)=0\Rightarrow 4x^3-2=0\Rightarrow x=1,\Rightarrow y=x^2=1$

و بنابراین $(1,1)$ نقطه موردنظر است.

۲۰. بر بیضی $x=2\text{Cos}t$، $y=\text{Sin}t$، $0\le t\le 2\pi$ نقطه‌ای بیابید که نزدیکترین نقطه ممکن به نقطه $(3/4,0)$ باشد.

حل $d(t)=(x-\frac{3}{4})^2+(y-0)^2=(2\text{Cos}t-\frac{3}{4})^2+\text{Sin}^2t$

$d'(t)=2(-2\text{Sin}t)(2\text{Cos}t-\frac{3}{4})+2\text{Sin}t\text{Cos}t$

$d'(t)=0\Rightarrow t=0,\ t=\frac{\pi}{3}$ و $d(0)=\frac{25}{16},\ d(\frac{\pi}{3})=\frac{13}{16}$

و چون به ازای $t=\frac{\pi}{3}$ کمترین فاصله را داریم. نقطه موردنظر

$(x,y)=(2\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})=(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ می‌باشد.

۲۱. طول یک طاق چرخزاد زیر را بیابید. $x=a(t-\sin t)$ ،$y=a(1-\cos t)$

حل

$$L=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

$x'=a(1-\cos t),\ y'=a\sin t$

$(x')^2+(y')^2=a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+a^2\sin^2 t=2a^2-2a^2\cos t$

$2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$

$$\Rightarrow L=2\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt$$

$$-4a\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi}=8a$$

۲۲. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران یک طاق چرخزاد $x=t-\sin t$ ،$y=1-\cos t$ حول محور x

حل

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds,\ x'=1-\cos t,\ y'=\sin t$$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{2-2\cos t}\,dt\Rightarrow$$

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^{\frac{3}{2}}dt=2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{2\pi}\left[2\sin^2\frac{t}{2}\right]^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=8\pi\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{64\pi}{3}$$

۲۳. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محصور بین محور x، و یک طاق از چرخزاد $x=t-\sin t$ ،$y=1-\cos t$ حول محور x (راهنمایی: $dv=\pi y^2dx=\pi y^2(dx/dt)dt$)

حل

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(1-\cos t)dt=5\pi^2$$

۲۴. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به، $x=2\cos t$ ،$y=\sin t$ ،$0\le t\le 2\pi$ حول محور y.

حل

$$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t)\cos t\,dt$$

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt$$

$$8\pi\left[\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16\pi}{3}$$

مسأله‌های گوناگون Miscellaneous Problems

۱. فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای از خم $x^2+xy+y^2=3$ و $P'(kx,ky)$ نقطه‌ای از خم OP، گذرنده از مبدأ و P، باشد. اگر k ثابت فرض شود، وقتی P بر خم C حرکت کند، برای خم حاصل از حرکت P' معادله‌ای بیابید.

حل

$$\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'}{k}\\ y=\dfrac{y'}{k}\end{cases}\Rightarrow$$

$$(\frac{x'}{k})^2+(\frac{x'}{k})(\frac{y'}{k})+(\frac{y'}{k})^2=3\Rightarrow x'^2+x'y'+y'^2=3k^2$$

۲. تقارن نسبت به دایره. دو نقطهٔ P و Q را نسبت به یک دایره و متقارن نامند هرگاه هر دو بر یکی از پرتوهایی واقع باشند که از مرکز صادر می‌شود، و حاصلضرب فواصلشان از مرکز برابر با مربع شعاع دایره باشد. اگر Q بر خط $x+2y-5=0$ سیر کند، مسیر نقطهٔ P که نسبت به دایره $x^2+y^2=4$ با Q متقارن است، چیست؟

حل گیریم $Q(x_0,y_0)$ بر خط $x+2y=5$ و $P(x,y)$ قرینه Q نسبت به دایره مفروض باشند، در نتیجه داریم $x_0+2y_0=5$ و اگر $y_0=mx_0$ باشد داریم $x_0+2mx_0=5$ در این صورت $x_0=\frac{5}{1+2m}$ و چون حاصلضرب فواصلشان از مرکز برابر با مربع شعاع است داریم.

$$\sqrt{x^2+m^2y^2}\sqrt{x_0^2+m_0^2y_0^2}=4$$

در این صورت داریم $x_0=\frac{4}{(1+m^2)x}$ پس نتیجه‌می‌شود

$$\frac{4}{(1+m^2)x}=\frac{5}{1+2m}\Rightarrow 5xm^2-8m+5x-4=0\Rightarrow$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16-5x(5x-4)}}{5x}\Rightarrow y=mx=\left(\frac{4\pm\sqrt{16+20x-25x^2}}{5x}\right)x$$

$$\Rightarrow 5y=4\pm\sqrt{16+20x-25x^2}\Rightarrow(5y-4)^2=16+20x-25x^2$$

$$\Rightarrow(x-\frac{2}{5})^2+(y-\frac{4}{5})=\frac{4}{5}$$

که دایره‌ای به مرکز $(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$ و شعاع $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ می‌باشد.

۳. نقطهٔ $P(x,y)$ چنان حرکت می‌کند که نسبت فواصلش از دو نقطهٔ ثابت، عدد ثابتی چون k است. نشان دهید که مسیر دایره است هرگاه $k\neq 1$، و خط مستقیم است هرگاه $k=1$.

حل $PP_0=kPP_1\Rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k^2(x-x_1)^2+k^2(y-y_1)^2$

$$\Rightarrow x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2=k^2[x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2]$$

$$\text{if } k=1\Rightarrow 2(x_1-x_0)x+2(y_1-y_0)y=x_1^2+y_1^2-x_0^2-y_0^2$$

که معادله یک خط راست است، حال اگر $k\neq 1$ باشد داریم معادله به شکل $A(x^2+y^2)+Bx+Cy=D$ در می‌آید که در آن $A=1-k^2$، $B=2k^2x_1-2x_0$ و $C=2(k^2y_1-y_0)$، $D=k(x_1^2+y_1^2)-(x_0^2+y_0^2)$

۴. مرکز و شعاع دایره‌ای را بیابید که از نقاط $A(2,0)$ و $B(6,0)$ می‌گذرد و بر خم $y=x^2$ مماس است.

حل با توجه به مختصات A و B مرکز دایره بر عمود منصف آن قرار دارد که خط $x=4$ می‌باشند. حال اگر x_0 و y_0 نقطهٔ تماس دایره سهمی باشد داریم. $y_0=x_0^2$, $(x_0-4)^2+(y_0-k)^2=r^2$ از طرفی نقطه $(6,0)$ روی دایره قرار دارد پس $4+k^2=r^2$ و شیب دایره با شیب سهمی در نقطه تماس برابرند پس $2x_0=-\frac{x_0-4}{y_0-k}$ در این صورت داریم

$$\begin{cases} y_0=x_0^2 \\ \frac{4-x_0}{k-y_0}=-2x_0 \end{cases},\quad \begin{cases} (x_0-4)^2+(y-k)^2=r^2 \\ 4+k^2=r^2 \end{cases}$$

با حل معادله‌های فوق می‌توانید، r و k را پیدا کرده و معادله دایره را بدست آورید.

۵. مرکز دایره‌ای را بیابید که از نقطهٔ $(0,1)$ می‌گذرد، و در $(2,4)$ بر خم $y=x^2$ مماس است.

حل در اینجا نیز مانند تمرین قبل اگر فرض کنیم معادله کلی دایره به صورت $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ باشد و معادله سهمی $y=x^2$ می‌باشد. خواهیم داشت شیب مماس بر دایره $\frac{x-h}{y-k}$ و شیب مماس بر سهمی $2x$ می‌باشد در این صورت در نقطه تماس سهمی و دایره داریم که دو شیب یکی هستند و $x_0=2$ می‌باشد پس می‌توان نوشت. $\frac{2-h}{4-k}=-2(2)\Rightarrow h+4k=18$ از طرفی نقطه $(0,1)$ بر دایره واقع است یعنی $h^2+(1-k)^2=r^2$ و چون نقطه $(2,4)$ هم نقطه تماس است پس بر دایره واقع است و داریم $(2-h)^2+(4-k)^2=r^2$ در این صورت

$$h^2+(1-k)^2=(2-h)^2+(4-k)^2\Rightarrow 4h+4k=19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4h+4k=19 \\ h+4k=18 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} k=\frac{53}{10} \\ h=\frac{-16}{5} \end{cases}$$

و بنابراین مرکز دایره $(\frac{-16}{5},\frac{53}{10})$ می‌باشد.

۶. معادله‌ای برای سهیمی با کانون $(4,0)$ و هادی $x=3$ بنویسید. سهمی را بکشید، و رأس، کانون، و هادی آن را مشخص کنید.

حل

$$y^2=2(x-\frac{7}{2})$$

۷. مطلوب است رأس، کانون، و هادی سهمی $x^2-6x-12y+9=0$

حل $(3,3)$ کانون و $(3,0)$ رأس $\Rightarrow p=3\Rightarrow 4p=12\Rightarrow (x-3)^2=12y$

۸. اگر از یک نقطه P واقع بر سهمی $y^2=kx$ خطوطی موازی محورهای مختصات رسم کنیم، ناحیهٔ محصور بین این خطوط و محورها توسط سهمی به دو ناحیهٔ کوچکتر تقسیم می‌شود.

الف) اگر این دو ناحیه کوچکتر حول محور y دوران کنند، نشان دهید که نسبت حجمهای دو جسم حاصل ۴:۱ است.

ب) اگر این دو ناحیه حول محور x دوران کنند، نسبت حجمهای دو جسم حاصل چیست؟

حل a) $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dy\Rightarrow V_S=\pi\int_0^{y_0}(\frac{y^2}{k})^2dy=\frac{\pi}{5k^2}y_0^5$

$$V_L=\pi\int_0^{y_0}\pi\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dy$$

$$=\pi\int_0^{y_0}\left(\left(\frac{y_0^2}{k}\right)^2-\left(\frac{y^2}{k}\right)\right)dy=\frac{\pi}{k^2}\left[y_0^4y-\frac{1}{5}y^5\right]_0^{y_0}=\frac{4\pi}{5k^2}y_0^5$$

$$\Rightarrow\frac{V_L}{V_S}=\frac{\frac{4\pi}{5k^2}y_0^5}{\frac{\pi}{5k^2}y_0^5}=4$$

b) $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx\Rightarrow V_S=\pi\int_0^{x_0}\left[(kx_0)-(kx)\right]dx$

$$=\frac{k\pi}{2}\left[2x_0x-x^2\right]_0^{x_0}=\frac{k\pi}{2}x_0^2$$

$$V_L=\pi\int_0^{x_0}(kx)dx=\frac{k\pi}{2}x_0^2\Rightarrow\frac{V_L}{V_S}=\frac{\frac{k\pi}{2}x_0^2}{\frac{k\pi}{2}x_0}=1$$

۹. نشان دهید که اوساط وترهایی از سهمی $x^2=4py$ که شیب آنها m باشد، بر یک خط مستقیم قرار می‌گیرند؛ معادلهٔ خط را نیز بیابید.

حل گیریم $A(x_0,y_0)$ و $B(x_1,y_1)$ دو نقطه دلخواه از سهمی داده شده باشد بنابراین داریم:

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\frac{x_1^2}{4p}-\frac{x_0^2}{4p}}{x_1-x_0}=\frac{\frac{1}{4p}(x_1-x_0)(x_1+x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{4p}(x_1+x_0)$$

$$=\frac{1}{2p}\left(\frac{x_1+x_0}{2}\right)=\frac{1}{2p}\bar{x}$$

که $\bar{x}$ وسط پاره خط AB خواهد بود و بنابراین $\bar{x}=2pm$

۱۰. خط گذرنده از کانون F و نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ واقع بر سهمی $y^2=4px$، سهمی را در نقطهٔ دیگری چون $Q(x_2,y_2)$ قطع می‌کند. مختصات Q را برحسب y_1 و p بیابید. اگر خط گذرنده از P و مبدأ، هادی را در R قطع کند، ثابت کنید که QR با محور سهمی موازی است.

حل با توجه به معادله سهمی نقطه $(p,0)$ کانون آن است و می‌دانیم شیب خط گذرنده از نقطه P برابر است با:

$$m=\frac{y_0-0}{x_0-p}=\frac{y_0}{x_0-p}=\frac{y_0}{\frac{y_0^2}{4p}-p}=\frac{4py_0}{y_0^2-4p^2}$$

بنابراین خط مورد نظر $y=m(x-p)=\frac{4py_0}{y_0^2-4p^2}(x-p)$ می‌باشد.

$$y^2=4xp\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{y^2}{4p} \\ y=\frac{4py_0}{y_0^2-4p^2}(x-p) \end{cases}\Rightarrow y=\frac{4py_0}{y_0^2-4p^2}(\frac{y^2}{4p}-p)$$

$$\Rightarrow y(y_0^2-4p^2)=(y^2y_0-4y_0p)\Rightarrow y(y_0^2-4p^2)=y_0(y^2-4p^2)$$

$$\Rightarrow y=y_0 \text{ یا } y=\frac{-4p^2}{y_0}$$

$$x=\frac{y^2}{4p}\Rightarrow x=\frac{1}{4p}\left(\frac{-4p^2}{y_0}\right)^2=\frac{4p^3}{y_0^2}$$

۱۱. سهمی نیم مکعبی. مطلوب است تعیین نقطه (یا نقاط) واقع بر خم $x^2=y^3$ که نزدیکترین نقطه (یا نقاط) به نقطهٔ $P(0,4)$ باشد (باشند). خم و کوتاهترین پاره‌خط از P تا خم را بکشید.

حل مربع فاصله نقطه دلخواه (x,y) از $(0,4)$ که (x,y) روی سهمی نیم مکعبی باشد به صورت زیر است.

$$d=(x-0)^2+(y-4)^2=x^2+(y-4)^2=y^3-(y-4)^2\Rightarrow f(y)=y^3+(y-4)^2$$

$$f'(y)=3y^2+2(y-4),\ f'(y)=0\Rightarrow y=-2,\ \frac{4}{3}$$

$$f''(y)=6y+2 \text{ if } y=\frac{4}{3}\Rightarrow f''(\frac{4}{3})>0$$

پس مینیمم فاصله به ازای $y=\frac{4}{3}$ و در نتیجه $x=\pm\frac{8\sqrt{3}}{9}$ روی می‌دهد.

۱۲. فرض کنید خط مماس بر سهمی $y^2=4px$ در نقطه‌ای چون Q، محور سهمی را در A قطع می‌کند، و خط گذرنده از Q و موازی با محور سهمی، هادی را در D قطع می‌کند. نشان دهید که Q، A، D، و کانون F سهمی چهار رأس یک لوزی‌اند.

حل کافی است نشان دهیم قطرهای چهارضلعی عمودمنصف هم هستند.

$$Q:(x_0,y_0)=(x_0,\sqrt{4px_0})\Rightarrow$$

$$A:(-x_0,0),\ F(p,0),\ D(-p,\sqrt{4px_0})$$

$$\begin{cases} \text{وسط } DF=\left(\frac{p-p}{2},\ 0+\frac{\sqrt{4px_0}}{2}\right)=\left(0,\frac{\sqrt{4px_0}}{2}\right) \\ \text{وسط } AQ=\left(\frac{x_0-x_0}{2},\frac{\sqrt{4px_0}}{2}\right)=\left(0,\frac{\sqrt{4px_0}}{2}\right)\end{cases}$$

$$m_{DF}=\frac{-\sqrt{4px_0}}{2p},\quad m_{AQ}=\frac{\sqrt{4px_0}}{2x_0}$$

$$=m_{DF}.m_{AQ}=-\left(\frac{\sqrt{4px_0}}{2p}\right)\left(\frac{\sqrt{4px_0}}{2x_0}\right)=-1$$

و بنابراین چون وسط DF و QA هم بر هم منطبق هستند پس چهار ضلعی یاد شده لوزی است

۱۳. اگر فاصلهٔ نقطه‌ای چون $P(x,y)$ از رأس سهمی $x^2=8y$ دو برابر فاصلهٔ آن تا کانون این سهمی باشد، معادلهٔ خم حاصل از حرکت P را بیابید. خم را مشخص کنید.

حل رأس سهمی $(0,0)$ است و کانون آن $(0,2)$،

$$\begin{cases} d_1=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \\ d_2=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\end{cases},\ d_1=2d_2\Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{x^2+(y-2)^2}\Rightarrow x^2+y^2=4x^2+4(y-2)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2-16y+16=0\Rightarrow x^2+y^2-\frac{16}{3}y+\frac{16}{3}=0 \qquad \text{(دایره)}$$

۱۴. معادله‌ای برای یک بیضی یا کانونهای $(1,0)$ و $(5,0)$ که یکی از رأسهای آن مبدأ است بنویسید.

حل مرکز در $(\frac{5+1}{2},\frac{0+0}{2})=(3,0)$ قرار دارد و $C=3-1=2$ از طرفی رأس بیضی مبدأ است یعنی $a=3$ بنابراین

$$b^2=a^2-c^2=9-4=5\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

۱۵. فرض کنید $F_1=(3,0)$ و $F_2=(0,5)$، $P=(-1,3)$.

الف) فواصل F_1P و F_2P را بیابید.

ب) آیا مبدأ درون بیضی مار بر P با کانونهای F_1 و F_2 قرار می‌گیرد یا بیرون آن؟ چرا؟

حل $a)\ F_1P=\sqrt{(3+1)^2+(0-3)^2}=5,\ F_2P=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$b)\ O=(0,0)\Rightarrow OF_1=3,\ OF_2=5$

$OF_1+OF_2=5+3=8>5+\sqrt{5}$ بیرون

۱۶. خروج از مرکز و مرکز بیضی زیر را بیابید.

$$x^2+12y^2-6x-48y+9=0$$

حل پس از مرتب سازی داریم

$$\frac{(x-3)^2}{48}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

$$a=\sqrt{48},\ b=2,\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{44},\ e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{44}{48}}=\sqrt{\frac{11}{12}},$$

مرکز هم $(3,2)$ می‌باشد.

۱۷. خروج از مرکز، مرکز، کانونها و رأسهای بیضی زیر را بیابید.

$$x^2+9y^2-6x-36y-99=0$$

حل ابتدا بیضی را به شکل استاندارد در می‌آوریم.

$$\frac{(x-3)^2}{144}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

مرکز $(3,2)$ است، $a=12$ و $b=4$ و بنابراین رأس‌ها $(3\pm12,2)$ و کانون‌ها هم $(3\pm8\sqrt{2},2)$ می‌باشد، خروج از مرکز

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{144-16}}{12}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۱۸. نشان دهید خط $y=mx+c$ بر خم $Ax^2+y^2-1=0$ مماس است اگر و تنها اگر ثابتهای A، m، و c در معادلهٔ $A(c^2-1)=m^2$ صدق کنند.

حل در نقطه تماس، خط، خم را قطع می‌کند، پس ابتدا این نقطه را پیدا کرده، سپس روی شیب خط در این نقطه بحث می‌کنیم.

$$Ax^2+y^2-1=0\Rightarrow Ax^2+(mx+c)^2-1=0\Rightarrow(A+m^2)x^2$$
$$+2cmx+c^2-1=0$$

حال اگر خط و خم مماس باشد، دلتای فوق باید صفر باشد یعنی

$$b^2-4ac=0\Rightarrow 4c^2m^2-4(c^2-1)(A+m^2)=0$$
$$\Rightarrow c^2m^2-m(c^2-1)-A(c^2-1)=0\Rightarrow m^2=A(c^2-1)$$

۱۹. معادلهٔ بیضی را بنویسید که خروج از مرکزش ۲/۳، یکی از رأسهایش $(3,1)$، و کانون نزدیک به آن $(1,1)$ باشد.

حل $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3c=2a$

چون یک رأس (۳،۱) و کانون هم (۱،۱) است پس $a-c=3-1=2$ بنابراین.

$$\begin{cases} a-c=2 \\ 3c=2a \end{cases} \Rightarrow a=6, c=4 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{20}$$

بنابراین مرکز $(x_0,y_0)=(1-4,1)=(-3,1)$

بنابراین معادله بیضی $\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{20}=1$ می‌باشد.

۲۰. یک بیضی را که در وضع متعارف قرار دارد به محل جدیدی در صفحه منتقل می‌کنیم و معادلهٔ آن به صورت زیر در می‌آید.

$x^2+4y^2-4x-8y+4=0$

چه انتقالی صورت گرفته است؟ مختصات مرکز بیضی در وضع جدید چیست؟

حل $x^2-4x+4(y^2-2y)=4 \Rightarrow (x-4x+4)+4(y^2-2y+1)=4+4+4$

$\Rightarrow (x-2)^2+4(y-1)^2=12 \Rightarrow x=x'-2, y=y'-1$ مرکز جدید (۲،۱).

۲۱. انتگرالهایی را به دست آورید که (الف) مساحت یک ربع از دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ (ب) مساحت یک ربع از بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ را به دست دهند. نشان دهید که انتگرال (ب)، b/a برابر انتگرال (الف) است. حال مساحت بیضی را از روی مساحت دایره که معلوم است به دست آورید.

حل

$$a)\ A_1=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$b)\ A_2=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}A_1$$

$$\Rightarrow A_2=\frac{b}{a}A_1=\frac{b}{a}(\pi a^2)=\pi ab$$

۲۲. مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$3x^2-y^2+12x-6y=0$

حل ابتدا هذلولوی را به شکل استاندارد در می‌آوریم.

$3(x^2+4x)-(y^2+6y)=0 \Rightarrow 3(x^2+4x+4)-(y^2+6y+9)=12-9$

$\Rightarrow 3(x+2)^2-(y+3)^2=3 \Rightarrow (x+2)^2-\frac{(y+3)^2}{3}=1$

مرکز (۳-،۲-)، رأس $(-3,-2\pm1)$ و کانونها در $(-3,-2\pm2)$ قرار دارد، مجانبها $y+3=\pm\sqrt{3}(x+2)$ هستند.

۲۳. مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید.

$9x^2-4y^2-18x-16y+29=0$

حل رأس (۱،۵-)، (۱،۱)، $C(1,-2)$، $F(1,-2\pm\sqrt{13})$ و $2(y+2)=\pm3(x-1)$.

۲۴. معادلهٔ هذلولیی با خروج از مرکز $\sqrt{2}$ و رأسهای (۲،۰) و (۲-،۰) را بیابید.

حل اگر رأس (۲،۰) و (۲-،۰) باشد، مرکز در (۰،۰) قرار دارد و $a=2$ است. از طرفی $e=\frac{c}{a}$ پس $c=\sqrt{2}=\frac{c}{a}$ و یا $c=2\sqrt{2}$ یا $c^2=8$ از طرفی $b^2=c^2-a^2$ یا $b^2=8-4=4$ پس معادله مورد نظر

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{4}-\frac{(y-0)^2}{4}=1$$

۲۵. اگر c ثابت مثبتی باشد، آنگاه $\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2-c^2}=1 \quad , \quad c^2<t^2$ خانواده‌ای از بیضیها را تعریف می‌کند که هر یک با مقدار خاصی از t مشخص می‌شود، نشان دهید که هر عضو از خانوادهٔ

$$\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{c^2-t^2}=1 \quad , \quad t^2<c^2$$

هر عضو از خانوادهٔ اول را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند.

حل

$$\begin{cases} \frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2-c^2}=1 \Rightarrow m=\frac{-x}{y}\left(\frac{t^2-c^2}{t^2}\right), c^2<t^2 \\ \frac{x^2}{t'^2}-\frac{y^2}{c^2-t'^2}=1 \Rightarrow m'=\frac{x}{y}\left(\frac{c^2-t'^2}{t'^2}\right), t'^2<c^2 \end{cases}$$

نقطه‌های تقاطع بیضی و هذلولوی را پیدا کنید.

$$\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2-c^2}=\frac{x^2}{t'^2}-\frac{y^2}{c^2-t'^2}$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{1}{t'^2}-\frac{1}{t^2}\right)=y^2\left(\frac{1}{t^2-c^2}+\frac{1}{c^2-t'^2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{t^2-t'^2}{(tt')^2}\right)=y^2\left(\frac{t'^2-t^2}{(t^2-c^2)(c^2-t'^2)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2}=\frac{(tt')^2}{(t^2-c^2)(c^2-t'^2)} \qquad (*)$$

$$mm'=-\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{t^2-c^2}{t^2}\right)\left(\frac{c^2-t'^2}{t'^2}\right)$$

$$=\frac{(tt')^2}{(t^2-c^2)(c^2-t'^2)}\cdot\left(\frac{t^2-c^2}{t^2}\right)\left(\frac{c^2-t'^2}{t'^2}\right)=-1$$

و نتیجه مورد نظر حاصل است که هر عضو از هر خانواده بر دیگری عمود است.

۲۶. نشان دهید که اگر مماس بر یک خط در نقطه‌ای چون $P(x,y)$ از مبدأ بگذرد، آنگاه در P، $dy/dx=y/x$. سپس، نشان دهید که از مبدأ نمی‌توان مماسی به هذلولی $x^2-y^2=1$ رسم کرد.

حل شیب خط گذرنده از (x,y) و (۰،۰)، $m=\frac{y-0}{x-0}=\frac{y}{x}$ است. شیب $x^2-y^2=1$، $\frac{x}{y}$ است اگر این دو شیب برابر باشند یعنی $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$ داریم $x^2-y^2=0$ که با $x^2-y^2=1$ در تناقض است یعنی در مبدأ هیچ مماسی بر هذلولوی وجود ندارد.

۲۷. در یک مثلث، دو رأس A و B ثابت هستند. رأس سوم، C(x,y)، طوری حرکت می‌کند که $\angle A=2(\angle B)$. مسیر حرکت C را بیابید.

حل به ازای $B=(-c,0)$ و $A(c,0)$ داریم.

$\angle A=2\angle B \Rightarrow \tan A=\tan 2B$

$\tan A=\frac{y}{c-x}$, $\tan 2B=\frac{2\tan B}{1-(\tan B)^2}$

$$\Rightarrow \frac{y}{c-x^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x+c}\right)}{1-\left(\frac{y}{x+c}\right)^2} \Rightarrow 3x^2-y^2+2cx-c^2=0$$

که مسیر شاخه راست هذلولوی فوق است توجه کنید $\tan B=\frac{y}{x+c}$

۲۸. فرض کنید p و q دو عدد مثبت‌اند که $q<p$، اگر r عدد دیگری باشد، ثابت کنید که $\frac{x^2}{p-r}+\frac{y^2}{q-r}=1$

معادلهٔ (الف) یک بیضی است. هرگاه $r<q$، (ب) یک هذلولی است هرگاه $q<r<p$، و (پ) معادلهٔ چیزی نیست هرگاه $p<r$. ثابت کنید که کانونهای این بیضیها و این هذلولیها بر هم منطبق‌اند، و این کانونها را بیابید.

حل

$$a)\ \begin{cases} q<p \\ r<q \end{cases} \Rightarrow r<q<p \Rightarrow \begin{cases} p-r>0 \\ q-r>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=p-r \\ b^2=q-r \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(بیضی)}$$

$$b)\ \begin{cases} q<r \\ q<p \end{cases} \Rightarrow q<r<p \Rightarrow \begin{cases} a^2=p-r>0 \\ -b^2=q-r<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(هذلولوی)}$$

$$c)\ \begin{cases} p<r \Rightarrow p-r<0 \\ q<r \Rightarrow q-r<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2=p-r<0 \\ -b^2=q-r<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{-a^2}+\frac{y^2}{-b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}=-1 \quad \neq$$

تناقض است پس هیچ معادله‌ای نمی‌تواند باشد.

۲۹. در یک سطح تراز صدای تفنگ و صدای گلوله که به هدف می‌خورد همزمان به گوش می‌رسد. شنونده در کجا قرار دارد؟

حل بر شاخه‌ای از هذلولوی که کانونهایش محل استقرار تفنگ و هدف است.

۳۰. نشان دهید که هر مماس بر هذلولی $xy=a^2$ همراه با مجانبهای هذلولی مثلثی به مساحت $2a^2$ تشکیل می‌دهند.

حل

$$m=\frac{-F_x}{F_y}=\frac{-y}{x} \Rightarrow y-y_0=\frac{-y_0}{x_0}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{if} \quad x=0 \Rightarrow y=2y_0=a \\ \text{if} \quad y=0 \Rightarrow x=2x_0=b \end{cases} \Rightarrow s=\frac{1}{2}ab$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}(2x_0)(2y_0)=2x_0y_0=2a^2$$

توجه کنید محورهای مختصات مجانب‌ها هستند.

۳۱. خروج از مرکز هذلولی $xy=1$ را بیابید.

حل

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases} \Rightarrow 1=xy=\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1 \Rightarrow a=\sqrt{2},\ c=2 \Rightarrow c=\sqrt{2}$$

۳۲. روی خم $x^2-2xy-3y^2+3=0$ تمام نقاطی را بیابید که خط مماس بر خم در آن نقاط بر خط $x+y=1$ عمود باشد. خم را مشخص کنید.

حل معادله داده شده هذلولوی است چرا که مبین آن مثبت است.

$$x^2-2xy-3y^2+3=0 \Rightarrow 2x-2xy'-2y-6yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{x-y}{x+3y}=m,$$

اما شیب خط $x+y=1$، $m=1$ است

$$m=1=\frac{x-y}{x+3y} \Rightarrow x+3y=x-y \text{ یا } y=0$$

$$\text{if } y=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

و نقاط $(\pm\sqrt{3},0)$ دارای چنین شرطی هستند.

۳۳. خطی چون PT بر خم $xy=x+y$ در نقطهٔ $P(-2,2/3)$ مماس است. معادلات دو خط قائم بر این خم و عمود بر PT را بیابید.

حل

$$xy=x+y \Rightarrow y+xy'=1+y' \Rightarrow y'=\frac{1-y}{x-1}$$

$$\Rightarrow y'\Big|_{(-2,\frac{2}{3})}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)}{-2-1}=\frac{-1}{9}=m \Rightarrow m'=+9 \Rightarrow y-\frac{2}{3}=9(x+2)$$

حال معادله خط دیگر را می‌یابیم که شیب آن $\frac{-1}{9}$ است. $3y-27x-56=0$

$$\frac{1-y}{x-1}=\frac{-1}{9} \Rightarrow x=1+9y-9 \Rightarrow x=9y-8$$

$$xy=x+y \Rightarrow (9y-8)y=9y-8+y \Rightarrow 9y^2-8y=10y-8$$

$$\Rightarrow 9y^2-18y+8=0 \Rightarrow (3y-2)(3y-4)=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3},$$

$$\text{if } y=\frac{4}{3} \Rightarrow x=4 \Rightarrow y-\frac{4}{3}=9(x-4) \Rightarrow 3y-27x+104=0$$

۳۴. معادلهٔ مماس بر خم $x^2-2xy+y^2+2x+y-6=0$ را در نقطهٔ (۲,۲) بیابید. خم را مشخص کنید.

حل

$$2x-2xy'-2y+2yy'+2+y'=0 \Rightarrow$$

$$(x-y+1)+y'(-x+y+\frac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2(-x+y-1)}{-2x+2y+1} \Rightarrow y'\Big]_{(2,2)}=-2$$

$$\Rightarrow y-2=-2(x-2) \Rightarrow y+2x=6$$

۳۵. معادلهٔ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادلهٔ یک مقطع مخروطی است. پارامترهای این معادله را چنان بیابید که دارای ویژگیهای زیر باشد.

الف) نسبت به مبدأ متقارن باشد؛ ب) از نقطهٔ (۱,۰) بگذرد؛

پ) خط $y=1$ در نقطهٔ (۲,۱-) بر آن مماس باشد.

حل

a) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=A(-x)^2+B(-x)(-y)$
$+C(-y)^2+D(-x)+E(-y)+F \Rightarrow -Dx-Ey=Dx+Ey \Rightarrow D=E=0$
$\Rightarrow Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0$

b) $(1,0)\in Curve \Rightarrow A(1)^2+B(0)(1)+C(0)^2+F=0$
$\Rightarrow A=-F \Rightarrow Ax^2+Bxy+Cy^2-A=0$

c) $(-2,1)\in Curve \Rightarrow A(-2)^2+B(-2)(1)+C(1)^2-A=0$
$4A-2B+C-A=0$ و $Ax^2+Bxy+Cy^2-A=0 \Rightarrow$
$2Ax+By-Bx'y'+2cyy'=0$
$2(A)(-2)+B(1)+B(2)(0)+2C(1)(0)=0 \Rightarrow B=4A$
$\Rightarrow Ax^2+4Axy+Cy^2-A=0,\ A(4)+4A(-2)(1)+C(1)-A=0$
$\Rightarrow 4A-9A+C=0 \Rightarrow C=5A \Rightarrow Ax^2+4Axy+5Ay^2-A=0 \quad A\neq 0$
$\Rightarrow x^2+4xy+5y^2-1=0$

۳۶. نشان دهید که معادلهٔ $xy-x-y-1=0$ یک هذلولی را نمایش می‌دهد. مرکز، رأسها، کانونها، محورها، و مجانبهای این هذلولی را بیابید. همه آنها را

با رسم شکل مشخص کنید.

حل $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow A=C=0, B=1$

$$, D=E=F=-1 \Rightarrow \tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{1}{0}=\infty \Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy-x-y-1=0 \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x'-y')(x'+y')$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')-\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')-1=0 \Rightarrow (x'-\sqrt{2})^2-y'^2=4$$

که معادله یک هذلولوی است بنابراین مرکز $(\sqrt{2},0)$، رأس‌ها $(\sqrt{2}\pm 1,0)$، کانون‌ها $(2\sqrt{2},0)$ و $(0,0)$ و مجانبها $y=\pm(x-\sqrt{2})$ می‌باشد.

۳۷. نشان دهید که معادلهٔ $\sqrt{2}y-2xy=2$ یک هذلولی را نشان می‌دهد. مرکز، رأسها، کانونها، محورها، و مجانبهای آن را بیابید.

حل $A=0,\ B=-2,\ C=0,\ D=0,\ E=\sqrt{2},\ F=-2$

$$\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\infty \Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$$

$$A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=-1$$

$$B'=B\cos 2\alpha+(C-A)\sin 2\alpha=0$$

$$C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=1$$

$$D'=D\cos\alpha+E\sin\alpha=1, \qquad E'=-D\sin\alpha+E\cos\alpha=+1$$

$$F'=F=-2 \Rightarrow -x'^2+0+y'^2+x'+y'=2$$

$$\Rightarrow \frac{\left(y'+\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(x'-\frac{1}{2}\right)^2}{2}=1$$

$$C(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}),\ V(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\pm\sqrt{2})$$

$$F(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\pm 2),\ e=\sqrt{2},\ y+\frac{1}{2}=\pm(x-\frac{1}{2})$$

۳۸. الف) نشان دهید که خط $b^2xx_1+a^2yy_1-a^2b^2=0$ بر بیضی $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ در نقطهٔ (x_1,y_1) مماس است.

ب) نشان دهید که خط $b^2xx_1-a^2yy_1-a^2b^2=0$ بر هذلولی $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$ در نقطهٔ (x_1,y_1) مماس است.

پ) نشان دهید که مماس بر مقطع مخروطی

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

در نقطهٔ (x_1,y_1) واقع بر آن، معادله‌ای به صورت زیر دارد

$$Axx_1+B(\frac{x_1y+xy_1}{2})+Cyy_1+D(\frac{x+x_1}{2})+E(\frac{y+y_1}{2})+F=0$$

حل a) $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0 \Rightarrow y'=\frac{-b^2x}{a^2y}$

$$\Rightarrow y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1) \Rightarrow a^2yy_1+b^2xx_1=b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$$

b) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow y'=m=\frac{b^2x}{a^2y} \Rightarrow y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$

$$\Rightarrow b^2xx_1-a^2yy_1=b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$$

۳۹. معادلهٔ $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ پس از دوران محورها در خلاف جهت ساعت به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/4$ رادیان به چه صورت در می‌آید؟ در معادلهٔ جدید، رادیکالها را از بین ببرید، و شکل خم را مشخص کنید.

حل

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}\right) \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}}=\sqrt{a} \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$=a-\sqrt{a}\sqrt{\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}}+\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow 2y'^2=2a\sqrt{2}x'-a^2$$

خم بخشی از سهمی فوق است.

۴۰. اگر $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\ ,\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$

آنگاه $dx=dx'\cos\alpha-dy'\sin\alpha\ ,\ dy=dx'\sin\alpha+dy'\cos\alpha$

نشان دهید که $dx^2+dy^2=dx'^2+dy'^2$ و

$$xdy-ydx=x'dy'-y'dx'$$

لذا کمیتهای dx^2+dy^2 و $xdy-ydx$ در اثر دوران محورها تغییر نمی‌کنند.

حل $dx=dx'\cos\alpha-dy'\sin\alpha \Rightarrow dx^2=dx'^2\cos^2\alpha$

$$-2dx'dy'\cos\alpha\sin\alpha+dy'^2\sin^2\alpha, dy=dx'\sin\alpha+dy'\cos\alpha \Rightarrow dy^2$$

$$=dx'^2\sin^2\alpha+2dx'dy'\cos\alpha\sin\alpha+dy'^2\cos^2\alpha \Rightarrow dx^2+dy^2$$

$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)dx'^2+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)dy'^2$$

$$=dx'^2+dy'^2 \text{ و } xdy=(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(dx'\sin\alpha+dy'\cos\alpha)$$

$$=x'\cos\alpha dx'\sin\alpha+x'\cos\alpha dy'\cos\alpha-y'\sin\alpha dx'\sin\alpha$$

$$-y'\sin\alpha dy'\cos\alpha, ydx=(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)(dx'\cos\alpha-dy'\sin\alpha)$$

$$=x'\sin\alpha dx'\cos\alpha-x'\sin\alpha dy'\sin\alpha+y'\cos\alpha dx'\cos\alpha$$

$$-y'\cos\alpha dy'\sin\alpha \Rightarrow xdy-ydx=x'dy'(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

$$-(y'dx')(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=x'dy'-y'dx'$$

در مسائل ۴۹-۵۸، چه نقاطی در معادلات و نامعادلات صدق می‌کنند؟ در مورد هر مسأله شکلی بکشید.

۴۱. $(2x+y-2)(x^2+y^2-4)(x^2-y)=0$

حل هر نقطه چون (x,y) که در معادله خط، دایره یا سهمی صدق کند حاصلضرب را صفر می‌کند.

۴۲. $(x^2+4y)(x^2-y^2-1)(x^2+y-25)(x^2+4y^2-4)=0$

حل هر نقطه چون (x,y) که در دایره، بیضی، هذلولوی و سهمی صدق کند حاصلضرب را صفر می‌کند.

۴۳. $(x+y)(x^2+y^2-1)=0$

حل هر نقطه چون (x,y) به قسمی که $x+y=0$ یا $x^2+y^2-1=0$

۴۴. $(y-x+2)(2y+x-4)=0$

حل هر نقطه چون (x,y) که $y-x+2=0$ یا $2y+x-4=0$

۴۵. $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)\le 1$

حل نقاط روی یا درون بیضی

۴۶. $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)\le 1$

حل هر نقطه رو یا خارج شاخه‌های هذلولوی

۴۷. $(9x^2+4y^2-36)(4x^2+9y^2-36)\le 0$

حل نقاطی که درون یک بیضی و بیرون از دیگری باشند زیرا حاصلضرب دو عدد وقتی منفی است که تنها یکی از آنها منفی باشد.

۴۸. $(9x^2+4y^2-36)(4x^2+9y^2-36)>0$

حل نقاطی که داخل هر دو بیضی باشد.

۴۹. $x^4-(y^2-9)^2=0$

حل نقاطی که بر دایره $x^2+y^2=9$ یا هذلولوی $y^2-x^2=9$ واقع‌اند.

۵۰. نشان دهید که شیب چرخزاد $y=a(1-\text{Cost})$ و $x=a(t-\text{Sint})$ برابر است با $dy/dx=\cot(t/2)$. در حالت خاصی که t برابر ۰ و 2π است، مماس بر چرخزاد به صورت قائم است.

حل

$$\begin{cases} dx=a-a\text{Cost} \\ dy=a\text{Sint}\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{a\text{Sint}}{a(1-\text{Cost})}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2\text{Sin}(\frac{t}{2})\text{Cos}(\frac{t}{2})}{1-(1-2\text{Sin}^2(\frac{t}{2}))}=\frac{\text{Sin}(\frac{t}{2})\text{Cos}(\frac{t}{2})}{\text{Sin}^2(\frac{t}{2})}=\cot(\frac{t}{2})$$

if $t=0$ or π then $\cot(\frac{t}{2})=0$ یعنی مماس عمود است.

۵۱. نشان دهید که اگر $b<a$، شیب چرخزاد

$x=at-b\text{Sint}\ ,\ y=a-b\text{Cost}$

همواره متناهی است.

حل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\text{Sint}}{a-b\text{Cost}}=\frac{\text{Sint}}{\frac{a}{b}-\text{Cost}}$$

if $b<a \Rightarrow \frac{a}{b}>1 \Rightarrow \frac{a}{b}-\text{Cost}>0$

یعنی مخرج هیچگاه صفر نمی‌شود پس $\frac{dy}{dx}$ متناهی است

۵۲. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری و معادلهٔ دکارتی شکل حاصل از حرکت نقطهٔ $P(x,y)$ اگر $\frac{dx}{dt}=-2y\ ,\ \frac{dy}{dt}=\text{Cost}$ و وقتی $t=0$ و $x=3$ و $y=0$ شکل را مشخص کنید.

حل $y'=\text{Cost}\Rightarrow y=-\text{Sint}+c,\ y(0)=0\Rightarrow c=0\Rightarrow y=-\text{Sint}$

$x'=-2y=-2\text{Sint}\Rightarrow x=2\text{Cost}+c$

$t=0\Rightarrow 3=2+c\Rightarrow c=1\Rightarrow x=2\text{Cost}+1\Rightarrow \text{Cos}^2t=\frac{(x-1)^2}{4},$

$\text{Sin}^2t=y^2 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$

۵۳. ماشین حساب انتگرال بیضوی.

الف) نشان دهید که محیط بیضی $x=a\text{Cost}\ ,\ y=b\text{Sint}\ ,\ 0\le t\le 2\pi$ را انتگرال $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\text{Cos}^2t}\,dt$ به دست می‌دهد که در آن e خروج از مرکز بیضی است.

ب) انتگرال مذکور در (الف) را یک انتگرال بیضوی می‌نامند. این انتگرال هیچ پاد مشتقی مقدماتی ندارد. اگر $a=1$ و $e=1/2$، طول محیط بیضی را به کمک قاعدهٔ ذوزنقه‌ای با ضابطهٔ $n=10$، برآورد کنید.

پ) قدرمطلق مشتق دوم $f(t)=\sqrt{1-e^2\text{Cos}^2t}$ از ۱ کمتر است. بر این اساس، معادلهٔ (۸) بخش ۹.۴ در مورد خطای تقریب مذکور در (ب) چه برآوردی به دست می‌دهد؟

حل $x=a\text{Cost},\ y=b\text{Sint} \Rightarrow x'=-a\text{Sint},\ y'=b\text{Cost}$

$$\Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\text{Sin}^2t+b^2\text{Cos}^2t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\text{Cos}^2t)+b^2\text{Cos}^2t}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\text{Cos}^2t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-c^2\text{Cos}^2t}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\frac{c^2}{a^2}\text{Cos}^2t)}\,dt$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\text{Cos}^2t}\,dt$$

۵۴. مطلوب است مرکز جرم یک ورق نازک به چگالی ثابت $\delta=1$ و محدود به محور x و یک طاق از چرخزاد

$x=a(t-\text{Sint})\ ,\ y=a(1-\text{Cost})$

(راهنمایی: $dA=ydx=y(dx/dt)dt$.)

حل $\frac{dx}{dt}=a(1-\text{Cost})$

$$M=\int_0^{2\pi}y\,dx-=\int_0^{2\pi}y(\frac{dx}{dt})dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(1-\text{Cost})^2dt=3\pi a^2,\ M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}y^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\text{Cost})^3dt=\frac{5a^3\pi}{2}$$

$$M_y=\int_0^{2\pi}xy\,dx=\int_a^{2\pi}a^2(t-\text{Sint})(1-\text{Cost})^2dt=3\pi^2a^3$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{3\pi^2a^3}{3\pi a^2}=\pi a,\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{5a^3\pi}{6\pi a^2}=\frac{5a}{6}$$

۵۵. خمهای $xy=2$ و $x^2-y^2=3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

حل

$$\begin{cases} xy=2\Rightarrow xy'+y=0\Rightarrow y'=\frac{-y}{x}=m_1 \\ x^2-y^2=3\Rightarrow 2x-2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{x}{y}=m_2\end{cases}$$

$\Rightarrow m_1m_2=(\frac{-y}{x})(\frac{x}{y})=-1$

۵۶. خمهای $y^2=4x+2$ و $y^2=64-16x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

حل $y^2-4x-4=0\Rightarrow m_1=\frac{-4}{2y}=\frac{2}{y}$

$y^2+16x-64=0\Rightarrow m_2=\frac{-16}{2y}=\frac{-8}{y}$

اما دو خم همدیگر را در نقاط $(۳,\pm۴)$ قطع می‌کنند در این صورت

$$m_۱(\pm۴)m_۲(\pm۴)=(\frac{-۸}{\pm۴})(\frac{۲}{\pm۴})=-۱$$

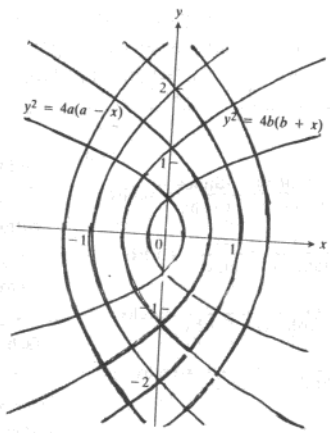
۵۷. نشان دهید که به ازای همهٔ مقادیر ثابت a و k $(k\neq۰,a\neq۰)$ خمهای $۲x^۲+۳y^۲=a^۲$ و $ky^۲=x^۳$ متعامدند. چهار خم متناظر با $a=۲$، $a=۴$، $k=۱/۲$، و $k=-۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل

$$۲x^۲+۳y^۲=a^۲ \Rightarrow m_۱=\frac{-۲x}{۳y} \text{ و } ky^۲-x^۳=۰\Rightarrow m_۲=\frac{۳x^۲}{۲ky}$$

$$=\frac{۳x^۲y}{۲ky^۲}=\frac{۳x^۲y}{۲x^۳}=\frac{۳y}{۲x}\Rightarrow m_۱m_۲=(\frac{-۲x}{۳y})(\frac{۳y}{۲x})=۱$$

۵۸. نشان دهید سهمیهای $y^۲=۴a(a-x)$ و $y^۲=۴b(b+x)$ که در آنها $a>۰$ و $b>۰$، به ازای همهٔ مقادیر a و b، کانون مشترکی دارند. نشان دهید که سهمیها در نقطه‌های $(a-b,\pm۲\sqrt{ab})$ یکدیگر را قطع می‌کنند، و هر سهمی از خانوادهٔ اول بر هر سهمی از خانوادهٔ دوم عمود است. (با تغییر دادن a و b دو خانواده از سهمیهای هم کانون به دست می‌آیند. هر خانواده را مجموعه‌ای از مسیرهای متعامد خانوادهٔ دیگر می‌نامند. شکل ۶۴.۸ را ببینید.)



حل

$$y^۲=۴a(a-x)-۴a(x-a)\Rightarrow C(a,۰),\ P=-a \Rightarrow F(۰,۰),$$

$$y^۲=۴b(x+b)\Rightarrow C(-b,۰),\ P=b \Rightarrow F(۰,۰),$$

$$۴a(a-x)=y^۲=۴b(b+x)\Rightarrow x=a-b\Rightarrow y^۲=۴a(a-x)=۴a(a-a+b)=۴ab$$

$$\Rightarrow y=\pm۲\sqrt{ab}$$

و نقطه اشتراک $(a-b,\pm۲\sqrt{ab})$ است. دو نقطه اشتراک شیب‌ها را بدست می‌آوریم.

$$y^۲=۴a(a-x)=۰\Rightarrow m_۱=\frac{۴a}{۲y}=\frac{-۲a}{y}=\frac{۲a}{\pm۲\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{a}{\pm\sqrt{ab}}=\mp\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$y^۲-۴b(b+x)=۰\Rightarrow m_۲=\frac{۴b}{۲y}=\frac{۲b}{y}=\frac{۲b}{\pm۲\sqrt{ab}}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow m_۱m_۲=\left(\mp\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(\pm\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=-۱$$

فصل نهم
تابعهای هیپربولیک

CHAPTER9 - Hyperbolic Fuctions

۱.۹ تعریفها و اتحادها

Definitions and Indentities

در هر یک از مسأله‌های ۱ـ۶ مقدار یکی از شش تابع هیپربولیک u داده می‌شود. با استفاده از تعریفها و اتحادهایی که در متن آوردیم، مقادیر پنج تابع هیپربولیک دیگر را معین کنید.

۱. $\text{Sinhu}=\frac{-۳}{۴}$

حل $\text{Cosh}^{۲}u-\text{Sinh}^{۲}u=۱\Rightarrow \text{Coshu}=\sqrt{۱+\text{Sinh}^{۲}u}$

$=\sqrt{۱+(\frac{-۳}{۴})^{۲}}=\frac{۵}{۴}$, $\text{tanhu}=\frac{\text{Sinhu}}{\text{Coshu}}=(\frac{-۳}{۴})/(\frac{۵}{۴})=\frac{-۳}{۵}$

$\text{cothu}=\frac{\text{Coshu}}{\text{Sinhu}}=(\frac{۵}{۴})/(\frac{-۳}{۴})=\frac{-۵}{۳}$

$\text{sechu}=\frac{۱}{\text{Coshu}}=\frac{۴}{۵}$, $\text{cschu}=\frac{۱}{\text{Sinhu}}=\frac{-۴}{۳}$

۲. $\text{Coshu}=\frac{۱۷}{۱۵}$ و $u>۰$

حل $\text{Sinhu}=\sqrt{\text{Cosh}^{۲}u-۱}=\sqrt{(\frac{۱۷}{۱۵})^{۲}-۱}=\sqrt{\frac{۶۴}{۲۲۵}}=\frac{۸}{۱۵}$

۳. $\text{tanhu}=\frac{-۷}{۲۵}$

حل $\text{sechu}=\sqrt{۱-(\frac{-۷}{۲۵})^{۲}}=\frac{۲۴}{۲۵}$

۴. $\text{cothu}=\frac{۱۳}{۱۲}$

حل $\text{cschu}=\sqrt{\text{Cosh}^{۲}u-۱}=\sqrt{(\frac{۱۳}{۱۲})-۱}=\frac{۵}{۱۲}$

۵. $\text{sechu}=\frac{۳}{۵}$

حل $\text{Coshu}=\frac{۱}{\text{sechu}}=\frac{۵}{۳}$

۶. $\text{csch}=\frac{۵}{۱۲}$

حل $\text{Sinhu}=\frac{۱}{\text{cschu}}=\frac{۱۲}{۵}$

در هر یک از مسأله‌های ۷ـ۱۴، عبارت داده شده را برحسب توابع نمایی بنویسید. نتیجه نهایی را تا حد امکان ساده کنید.

۷. $۲\text{Cosh}(\text{Lnx})$

حل $۲\text{Cosh}(\text{Lnx})=۲\left(\frac{e^{\text{Lnx}}+e^{-\text{Lnx}}}{۲}\right)=x+e^{\text{Lnx}^{-۱}}=x+\frac{۱}{x}$

حالت کلی $e^{a\text{Ln}(u(x))}=(u(x))^{a}$

۸. $\text{Sinh}(۲\text{Lnx})$

حل $\text{Sinh}(۲\text{Lnx})=\frac{e^{۲\text{Lnx}}-e^{-۲\text{Lnx}}}{۲}=\frac{x^{۲}-x^{-۲}}{۲}$

۹. $\text{tanh}(\text{Lnx})$

حل $\text{tanh}(\text{Lnx})=\frac{e^{\text{Lnx}}-e^{-\text{Lnx}}}{e^{\text{Lnx}}+e^{-\text{Lnx}}}=\frac{x-x^{-۱}}{x+x^{-۱}}=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$

۱۰. $\frac{۱}{\text{Coshx-Sinhx}}$

حل $\text{Coshx-Sinhx}=\frac{۱}{۲}(e^{x}+e^{-x}-e^{x}+e^{-x})=e^{-x}$

$\Rightarrow\frac{۱}{\text{Coshx-Sinhx}}=\frac{۱}{e^{-x}}=e^{x}$

۱۱. $\text{Cosh}۵x+\text{Sinh}۵x$

حل $e^{۵x}$

۱۲. $(\text{Sinhx}+\text{Coshx})^{۴}$

حل $(\text{Sinhx}+\text{Coshx})^{۴}=(\frac{e^{x}-e^{-x}+e^{x}+e^{-x}}{۲})^{۴}=e^{۴x}$

حالت کلی $(\text{Sinhx}+\text{Coshx})^{n}=e^{nx}$

۱۳. $\text{Cosh}۳x-\text{Sinh}۳x$

حل $(\text{Cosh}(nx)-\text{Sinh}(nx))=\frac{۱}{۲}(e^{nx}+e^{-xn}-e^{nx}+e^{-nx})$

$=\frac{۲e^{-nx}}{۲}=e^{-nx}\Rightarrow \text{Cosh}۳x-\text{Sinh}۳x=e^{-۳x}$

۱۴. $\text{Ln}(\text{Coshx}+\text{Sinhx})+\text{Ln}(\text{Coshx-Sinhx})$

حل $\text{Ln}(\text{Coshx}+\text{Sinhx})+\text{Ln}(\text{Coshx-Sinhx})=\text{Ln}(e^{x})$

$+\text{Ln}(e^{-x})=\text{Ln}(e^{x})+\text{Ln}(e^{x})^{-۱}=\text{Ln}(e^{x})-\text{Ln}(e^{x})=x-x=۰$

در هر یک از مسأله‌های ۱۵ـ۲۴، معین کنید که تابع داده زوج است یا فرد و یا هیچکدام.

۱۵. tanhx

حل فرداست. $\text{tanh}(-x)=\frac{\text{Sinh}(-x)}{\text{Cosh}(-x)}=\frac{-\text{Sinhx}}{\text{Coshx}}=-\text{tanhx}$

۱۶. cothx

حل فرد است. $\text{coth}(-x)=\frac{۱}{\text{tanh}(-x)}=\frac{-۱}{\text{tanhx}}=-\text{cothx}$

۱۷. sechx

حل زوج است. $\text{sech}(-x)=\frac{۱}{\text{Cosh}(-x)}=\frac{۱}{\text{Coshx}}=\text{sechx}$

۱۸. cschx

حل فرد است $\text{csch}(-x)=\frac{۱}{\text{Sinh}(-x)}=\frac{-۱}{\text{Sinhx}}=-\text{cschx}$

۱۹. $\text{Cosh}۳x$

حل $\text{Cosh}(ax)$ تابعی زوج است.

۲۰. $\text{Sinh}۳x$

حل $\text{Sinh}(ax)$ تابعی فرد است.

۲۱. SinhxCoshx

حل فرد است.

۲۲. $(\text{Sinhx})^{۲}$

حل زوج است $(\text{Sinh}(-x))^{۲}=(-\text{Sinhx})^{۲}=(\text{Sinhx})^{۲}$

۲۳. sechx+Coshx

حل زوج است $\text{sech}(-x)+\text{Cosh}(-x)=\text{sechx}+\text{Coshx}$

۲۴. Sinhx+Coshx

حل $\begin{cases}\text{Sinhx}+\text{Coshx}=e^{x}\\ \text{Sinh}(-x)+\text{Cosh}(-x)=e^{-x}\end{cases}\Rightarrow -e^{x}\neq e^{-x}$

پس این تابع نه فرد است و نه زوج است.

درمسأله‌های ۲۵ و ۲۶، معادلهٔ داده شده را نسبت به x حل کنید.

۲۵. $\text{Cosh}x=\text{Sinh}x+\frac{1}{2}$

حل $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{Ln}e^{-x}=\text{Ln}\frac{1}{2}\Rightarrow$
$x=-\text{Ln}\frac{1}{2}\Rightarrow x=\text{Ln}2$

۲۶. $\tanh x=\frac{3}{5}$

حل $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5e^x-5e^{-x}=3e^x+3e^{-x}$
$\Rightarrow 2e^x=8e^{-x}\Rightarrow 2e^{2x}=8\Rightarrow e^{2x}=4\Rightarrow \text{Ln}e^{2x}=\text{Ln}4\Rightarrow$
$2x=\text{Ln}4\Rightarrow 2x=2\text{Ln}2\Rightarrow x=\text{Ln}2$

در مسأله‌های ۲۷ و ۲۸، درستی اتحادهای داده شده را تحقیق کنید.

۲۷. $\text{Sinh}(u+v)=\text{Sinh}u\text{Cosh}v+\text{Cosh}u\text{Sinh}v$

حل $\text{Sinh}u\text{Cosh}v+\text{Cosh}u\text{Sinh}v=(\frac{e^u-e^{-u}}{2})(\frac{e^v+e^{-v}}{2})$
$+(\frac{e^u+e^{-u}}{2})(\frac{e^v-e^{-v}}{2})=\frac{1}{2}(e^{u+v}-e^{-(u+v)})=\text{Sinh}(u+v)$

۲۸. $\text{Cosh}(u+v)=\text{Cosh}u\text{Cosh}v+\text{Sinh}u\text{Sinh}v$

حل $\text{Cosh}u\text{Cosh}v+\text{Sinh}u\text{Sinh}v=(\frac{e^u+e^{-u}}{2})(\frac{e^v+e^{-v}}{2})$
$+(\frac{e^u-e^{-u}}{2})(\frac{e^v-e^{-v}}{2})=\frac{e^{u+v}+e^{-(v+u)}}{2}=\text{Cosh}(u+v)$

با استفاده از اتحادهای مذکور در مسأله‌های ۲۷ و ۲۸، اتحادهای زیر را استنتاج کنید.

۲۹. $\text{Sinh}(u-v)=\text{Sinh}u\text{Cosh}v-\text{Cosh}u\text{Sinh}v$

حل $\text{Sinh}(u-v)=\text{Sinh}u\text{Cosh}(-v)+\text{Cosh}u\text{Sinh}(-v)$
$=\text{Sinh}u\text{Cosh}v-\text{Cosh}u\text{Sinh}v$

۳۰. $\text{Cosh}(u-v)=\text{Cosh}u\text{Cosh}v-\text{Sinh}u\text{Sinh}v$

حل $\text{Cosh}(u-v)=\text{Cosh}u\text{Cosh}(-v)+\text{Sinh}u\text{Sinh}(-v)$
$=\text{Cosh}u\text{Cosh}v-\text{Sinh}u\text{Sinh}v$

با استفاده از اتحادهای مذکور در مسأله‌های ۲۷ و ۳۰؛ درستی اتحادهای مسأله‌های ۳۱ و ۳۶ را تحقیق کنید.

۳۱. $\text{Sinh}u\text{Cosh}v=\frac{1}{2}\text{Sinh}(u+v)+\frac{1}{2}\text{Sinh}(u-v)$

حل $\frac{1}{2}\text{Sinh}(u+v)+\frac{1}{2}\text{Sinh}(u-v)=\frac{1}{2}(\text{Sinh}u\text{Cosh}v$
$+\text{Cosh}u\text{Sinh}v+\text{Sinh}u\text{Cosh}v-\text{Sinh}v\text{Cosh}u)$
$=\frac{1}{2}(2\text{Sinh}u\text{Cosh}v)=\text{Sinh}u\text{Cosh}v$

۳۲. $\text{Cosh}u\text{Sinh}v=\frac{1}{2}\text{Sinh}(u+v)-\frac{1}{2}\text{Sinh}(u-v)$

حل $\frac{1}{2}\text{Sinh}(u+v)-\frac{1}{2}\text{Sinh}(u-v)=\frac{1}{2}(\text{Sinh}u\text{Cosh}v$
$+\text{Sinh}v\text{Cosh}u-\text{Sinh}u\text{Cosh}v+\text{Sinh}v\text{Cosh}u)$
$=\frac{2}{2}\text{Sinh}v\text{Cosh}u=\text{Sinh}v\text{Cosh}u$

۳۳. $\text{Cosh}u\text{Cosh}v=\frac{1}{2}\text{Cos}(u+v)+\frac{1}{2}\text{Cosh}(u-v)$

حل $\frac{1}{2}\text{Cosh}(u+v)+\frac{1}{2}\text{Cosh}(u-v)$
$\frac{1}{2}[\text{Cosh}u\text{Cosh}v+\text{Sinh}u\text{Sinh}v+\text{Cosh}u\text{Cosh}v-\text{Sinh}u\text{Sinh}v]$
$=\text{Cosh}u\text{Cosh}v$

۳۴. $\text{Sinh}u\text{Sinh}v=\frac{1}{2}\text{Cosh}(u+v)-\frac{1}{2}\text{Cosh}(u-v)$

حل $\frac{1}{2}[\text{Cosh}(u+v)-\text{Cosh}(u-v)]=\frac{1}{2}[\text{Cosh}u\text{Cosh}v+$
$\text{Sinh}u\text{Sinh}v-\text{Cosh}u\text{Cosh}v+\text{Sinh}u\text{Sinh}v]=\text{Sinh}u\text{Sinh}v$

۳۵. $\text{Sinh}3u=\text{Sinh}^3u+3\text{Cosh}^2u\text{Sinh}u=3\text{Sinh}u+4\text{Sinh}^3u$

حل $\text{Sinh}3u=\text{Sinh}(u+2u)=\text{Sinh}u\text{Cosh}2u+\text{Cosh}u\text{Sinh}2u$
$=\text{Sinh}u(\text{Cosh}^2u+\text{Sinh}^2u)+\text{Cosh}u(2\text{Sinh}u\text{Cosh}u)$
$=\text{Sinh}u\text{Cosh}^2u+\text{Sinh}^3u+2\text{Sinh}u\text{Cosh}^2u=\text{Sinh}^3u$
$+3\text{Sinh}u\text{Cosh}^2u=\text{Sinh}^3u+3\text{Sinh}u(1+\text{Sinh}^2u)$
$=3\text{Sinh}u+4\text{Sinh}^3u$

۳۶. $\text{Cosh}3u=\text{Cosh}u+3\text{Sinh}^2u\text{Cosh}u=4\text{Cosh}^3u-3\text{Cosh}u$

حل $\text{Cosh}3u=\text{Cosh}(u+2u)=\text{Cosh}u\text{Cosh}2u+\text{Sinh}u\text{Sinh}2u$
$=\text{Cosh}u(2\text{Cosh}^2u-1)+\text{Sinh}u(2\text{Sinh}u\text{Cosh}u)$
$=2\text{Cosh}^3u-\text{Cosh}u+2\text{Cosh}u\text{Sinh}^2u=2\text{Cosh}^3u-\text{Cosh}u$
$+2\text{Cosh}u(\text{Cosh}^2u-1)=4\text{Cosh}^3u-3\text{Cosh}u$

۳۷. نشان دهید که $\text{Sinh}^2u-\text{Sinh}^2v=\text{Cosh}^2u-\text{Cosh}^2v$

حل $\text{Cosh}^2u-\text{Cosh}^2v=(1+\text{Sinh}^2u)-(1+\text{Sinh}^2v)$
$=\text{Sinh}^2u-\text{Sinh}^2v$

۳۸. نشان دهید که $(\text{Cosh}x+\text{Sinh}x)^n=\text{Cosh}nx+\text{Sinh}nx$

حل $(\text{Cosh}x+\text{Sinh}x)^n=e^{nx}=\text{Cosh}(nx)+\text{Sinh}(nx)$

۳۹. نشان دهید که معادله‌ای $x=-\text{Cosh}u,\ y=\text{Sinh}u,\ -\infty<u<\infty$ معادله‌های پارامتری شاخهٔ چپ هذلولی $x^2-y^2=1$ هستند.

حل $x^2-y^2=\text{Cosh}^2u-\text{Sinh}^2u=1$ و $\text{Cosh}x>0\Rightarrow$
$-\text{Cosh}x<0\ \forall x\in R$ پس معادله شاخه چپ هذلولوی است.

۴۰. نشان دهید که خط مماس بر هذلولی $x^2-y^2=1$ در نقطه $P(\text{Cosh}u,\text{Sinh}u)$ محور x را در نقطه $(\text{sech}u,0)$ و، اگر قائم نباشد، محور y را در نقطهٔ $(0,-\text{csch}u)$ قطع می‌کند.

حل $\left.\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\right|_{(\text{Cosh}u,\text{Sinh}u)}=\text{coth}u\Rightarrow y-\text{Sinh}u=$
$\text{coth}u(x-\text{Cosh}u)$, if $y=0\Rightarrow -\text{Sinh}u=\frac{\text{Cosh}u}{\text{Sinh}u}(x-\text{Cosh}u)$
$u\Rightarrow 2u-\text{Sinh}^2u=1$
$\Rightarrow -\text{Sinh}^2u=x\text{Cosh}u-\text{Cosh}^2u\text{Cosh}u=\text{Cosh}$
$\Rightarrow x=\text{sech}u$, if $x=0\Rightarrow y-\text{Sinh}u=\frac{\text{Cosh}u}{\text{Sinh}u}(0-\text{Cosh}u)$
$\Rightarrow y\text{Sinh}u-\text{Sinh}^2u=-\text{Cosh}^2u\Rightarrow y\text{Sinh}u=$
$-(\text{Cosh}^2u-\text{Sinh}^2u)=-1\Rightarrow y=-\text{csch}u$

۴۱. نشان دهید که r، فاصله از مبدأ O تا نقطه $P(\text{Cosh}u,\text{Sinh}u)$ واقع بر هذلولی $x^2-y^2=1$ برابر است با $r=\sqrt{\text{Cosh}2u}$.

حل $r=\sqrt{\text{Cosh}^2u+\text{Sinh}^2u}=\sqrt{\text{Cosh}^2u+\text{Cosh}^2u-1}$
$=\sqrt{2\text{Cosh}^2u-1}=\sqrt{\text{Cosh}2u}$

۴۳. اگر θ دربازهٔ $-\pi/2<\theta<\pi/2$ باشد و $\text{Sinh}x=\tan\theta$، نشان دهید که $\text{Cosh}x=\sec\theta$، $\tanh x=\text{Sin}\theta$، $\text{coth}x=\csc\theta$، $\text{csch}x=\cot\theta$ و $\text{sech}x=\text{Cos}\theta$.

حل: if $\theta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow \cos\theta>0\Rightarrow$

$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\sinh^2 x}=\sqrt{\cosh^2 x}$

$=|\cosh x|=\cosh x,\ \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\cosh x}=\operatorname{sech}x$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sinh x}=\operatorname{csch}x$

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\sinh x\operatorname{sech}x=\tanh x$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\tanh x}=\coth x$

۲.۹ مشتقها و انتگرالها

Derivatiues and Integrals

$\frac{d(\tanh u)}{dx}=\operatorname{sech}^2 u.\frac{du}{dx}$

$\frac{d(\coth u)}{dx}=-\operatorname{csch}^2 u.\frac{du}{dx}$

$\frac{d(\operatorname{sech}u)}{dx}=-\operatorname{sech}u.\tanh u\frac{du}{dx}$

$\frac{d(\operatorname{csch}u)}{dx}=-\operatorname{csch}u.\coth u\frac{du}{dx}$

در مسأله‌های ۱ـ۱۶، dy/dx را بیابید

۱. $y=\sinh 3x$

حل: $f(x)=\sinh u(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cosh u(x)$

$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=3\cosh 3x$

۲. $y=\cosh^2 5x$

حل: $f(x)=(\cosh u(x))^n\Rightarrow f'(x)=nu'(x)\sinh u(x)$

$(\cosh u(x))^{n-1}$ و $y'=\frac{dy}{dx}=2(5)\sinh 5x\cosh 5x=5\sinh 10x$

۳. $y=\cosh^2 5x-\sinh^2 5x$

حل: $y=\cosh^2 5x-\sinh^2 5x\Rightarrow y=1\Rightarrow y'=0$

۴. $y=\tanh 2x$

حل: $f(x)=(\tanh u(x))^n\Rightarrow f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=nu'(x)\operatorname{sech}^2(u(x))$

$(\tanh u(x))^{n-1}\Rightarrow y'=2\operatorname{sech}^2(2x)$

۵. $y=\coth(\tan x)$

حل: $f(x)=y=(\coth(u(x))^n\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-nu'(x)\operatorname{csch}^2 u(x)$

$(\coth(u(x))^{n-1}\Rightarrow y'=-\sec^2 x.\operatorname{csch}^2(\tan x)$

۶. $y=\operatorname{sech}^3 x$

حل: $f(x)=(\operatorname{sech}u(x))^n\Rightarrow f'(x)=-nu'(x)\operatorname{sech}(u(x))\tanh(u(x))$

$(\operatorname{sech}(u(x))^{n-1}\Rightarrow y'=-3\operatorname{sech}x\tanh x\operatorname{sech}^2 x=-3\operatorname{sech}^3 x\tanh x$

۷. $y=4\operatorname{csch}(x/4)$

حل: $y'=-4(\frac{1}{4})\operatorname{csch}(\frac{x}{4})\coth(\frac{x}{4})$

۸. $\sinh y=\tan x$

حل: $y'\cosh y=\sec^2 x\Rightarrow y'=\operatorname{sech}y\sec^2 x$

۹. $y=\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x$

حل: $y=\operatorname{sech}^2 x+(1-\operatorname{sech}^2 x)=1\Rightarrow y'=0$

۱۰. $y=\operatorname{csch}^2 x$

حل: $y'=-2(\operatorname{csch}x\coth x)\operatorname{csch}x=-2\operatorname{csch}^2 x\coth x$

۱۱. $y=\sinh^{-1}(\tanh x)$

حل: $y'=\frac{\operatorname{sech}^2 u}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}=\frac{\operatorname{sech}^2 x}{\operatorname{sech}x}=\operatorname{sech}x$

۱۲. $y=x-(1/4)\coth 4x$

حل: $y'=1-(\frac{1}{4})(-4\operatorname{csch}^2 4x)=1+\operatorname{csch}^2 4x$

۱۳. $y=\operatorname{Ln}|\tanh(x/2)|$

حل: $f(x)=\operatorname{Ln}[u(x)]\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2(\frac{x}{2})}{|\tanh(\frac{x}{2})|}=\frac{1}{2\frac{\sinh(\frac{x}{2})}{\cosh(\frac{x}{2})}.\cosh^2(\frac{x}{2})}$$

$$=\frac{1}{2\sinh(\frac{x}{2})\cosh(\frac{x}{2})}=\frac{1}{\sinh x}=\operatorname{csch}x$$

۱۴. $y=x^3\sinh x$

حل: $y'=2x^3\sinh x+x^3\cosh x$

۱۵. $y=x\sinh 2x-(1/2)\cosh 2x$

حل: $y'=\sinh 2x+2x\cosh 2x-\sinh 2x=2x\cosh 2x$

۱۶. $y=x\sinh x-\cosh x$

حل: $y'=\sinh x+x\cosh x-\sinh x=x\cosh x$

۱۷. نشان دهید که $\int\operatorname{sech}x\,dx=\sin^{-1}(\tanh x)+c$

حل: لطفاً تمرین ۱۱ را نگاه کنید. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(\tanh x))=\operatorname{sech}x$

۱۸. نشان دهید که $\int\operatorname{csch}x\,dx=\operatorname{Ln}\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+c$

حل: $\frac{d}{dx}(\operatorname{Ln}|\tanh(\frac{x}{2})|)=\operatorname{csch}x$

لطفاً تمرین ۱۳ را نگاه کنید.

در مسأله‌های ۱۹ـ۲۸، انتگرال را محاسبه کنید.

۱۹. $\int_{-1}^{1}\cosh 5x\,dx$

حل: $\int_{-1}^{1}\cosh 5x\,dx=\frac{2}{5}\sinh 5x\Big]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{5}[\sinh 5-0]=\frac{2}{5}\sinh 5$

۲۰. $\int_{-1}^{0}\cosh(2x+1)dx$

حل: $\int_{-1}^{0}\cosh(2x+1)dx=\frac{1}{2}\sinh(2x+1)\Big]_{-1}^{0}$

$\frac{1}{2}[\sinh 1-\sinh(-1)]=\sinh 1$

۲۱. $\int_{-3}^{3}\sinh x\,dx$

حل: انتگرالده تابعی فرد و بازه متقارن است پس حاصل انتگرال صفر است

۲۲. $\int_{-\pi}^{\pi}\tanh 2x\,dx$

حل انتگرالده تابعی فرد و بازه متقارن است، پس حاصل انتگرال صفر است.

۲۳. $\int_{0}^{1} x\,\mathrm{Cosh}x\,dx$

حل $\int_{0}^{1} x\,\mathrm{Cosh}x\,dx = x\,\mathrm{Sinh}x + \mathrm{Cosh}x\Big]_{0}^{1} = 1 - e^{-1}$

۲۴. $\int_{\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}4} \coth x\,dx$

حل $\int_{\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}4} \coth x\,dx = \int_{\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}4} \frac{\mathrm{Cosh}x}{\mathrm{Sinh}x}dx = \mathrm{Ln}\,|\,\mathrm{Sinh}x\,|\Big]_{\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}4}$

$= \mathrm{Ln}\left|\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right|\Big]_{\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}4} = \mathrm{Ln}\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{2}\right| - \mathrm{Ln}\left|\frac{2-\frac{1}{2}}{2}\right| = \mathrm{Ln}\frac{5}{2}$

۲۵. $\int_{0}^{1/2} \frac{\mathrm{Sinh}x}{e^{x}}dx$

حل $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{Sinh}x}{e^{x}}dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{x}}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-e^{-2x})$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e^{-2x}\Big]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4e}$

۲۶. $\int_{0}^{\mathrm{Ln}2} 4e^{x}\,\mathrm{Cosh}x\,dx$

حل $\int_{0}^{\mathrm{Ln}2} 4e^{x}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}(e^{2x}+1)dx$

$e^{2x} + 2x\Big]_{0}^{\mathrm{Ln}2} = 3 + 2\mathrm{Ln}2$

۲۷. $\int_{0}^{1} \mathrm{Sinh}\sqrt{x}\,dx$

حل $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2u\,du \Rightarrow \int_{0}^{1} \mathrm{Sinh}\sqrt{x}\,dx$

$= 2\int_{0}^{1} u\,\mathrm{Sinh}u\,du = 2u\,\mathrm{Cosh}u - 2\mathrm{Sinh}u\Big]_{0}^{1} = 2e^{-1}$

۲۸. $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{Cosh}(\mathrm{Ln}x)dx}{x}$

حل $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{Cosh}(\mathrm{Ln}x)}{x}dx = \mathrm{Sinh}(\mathrm{Ln}x)\Big]_{1}^{2}$

$= \mathrm{Sinh}(\mathrm{Ln}2) - \mathrm{Sinh}(\mathrm{Ln}1) = \mathrm{Sinh}(\mathrm{Ln}2) = \frac{2-1/2}{2} = \frac{3}{4}$

در مسأله‌های ۲۹ ـ ۴۶، انتگرال را محاسبه کنید.

۲۹. $\int \mathrm{Cosh}(2x+1)dx$

حل $\int \mathrm{Cosh}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\mathrm{Sinh}(2x+1) + c$

۳۰. $\int \tanh x\,dx$

حل $\int \tanh x\,dx = \int \frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x}dx = \mathrm{Ln}\,|\,\mathrm{Cosh}x\,| + c$

۳۱. $\int \frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}^{4}x}dx$

حل $\int \frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}^{4}x}dx = \int \mathrm{Cosh}^{-4}x\,\mathrm{Sinh}x\,dx = \frac{-1}{3}\mathrm{Cosh}^{-3}x + c$

$= \frac{-1}{3}\mathrm{sech}^{3}x + c$

۳۲. $\int \frac{4dx}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$

حل $\int \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}dx = \int\left(\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}\right)^{2}dx = \int \frac{1}{\mathrm{Cosh}^{2}x}dx$

$= \int \mathrm{sech}^{2}x\,dx = \tanh x + c$

۳۳. $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$

حل $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx = \int \frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x}dx = \mathrm{Ln}(\mathrm{Cosh}x) + c$

۳۴. $\int \tanh^{2}x\,dx$

حل $\int \tanh^{2}x\,dx = \int(1-\mathrm{sech}^{2}x)dx = x - \tanh x + c$

۳۵. $\int \frac{\mathrm{Sinh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

حل $\int \frac{\mathrm{Sinh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \mathrm{Sinh}u\,du = 2\mathrm{Cosh}u + c$

$= 2\mathrm{Cos}\,h\sqrt{x} + c$

۳۶. $\int \mathrm{Cosh}^{2}3x\,dx$

حل $\int \mathrm{Cosh}^{2}3x\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\mathrm{Cosh}6x)dx = \frac{1}{12}\mathrm{Sinh}6x + \frac{x}{2} + c$

۳۷. $\int \sqrt{\mathrm{Cosh}x - 1}\,dx$

حل $\int \sqrt{\mathrm{Cosh}x - 1}\,dx = \int \sqrt{(2\mathrm{Cosh}^{2}(\frac{x}{2}) - 1) - 1}\,dx$

$= \sqrt{2}\int \mathrm{Sinh}(\frac{x}{2})dx = 2\sqrt{2}\,\mathrm{Cosh}(\frac{x}{2}) + c$

۳۸. $\int \mathrm{Cosh}^{2}5x\,dx$

حل $\int \mathrm{Cosh}^{2}5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\mathrm{Cosh}10x + 1)dx = \frac{1}{20}\mathrm{Sinh}10x + \frac{x}{2} + c$

۳۹. $\int 2\mathrm{Cosh}x\,\mathrm{Sinh}x\,dx$

حل $\int 2\mathrm{Cosh}x\,\mathrm{Sinh}x\,dx = \int \mathrm{Sinh}2x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Cosh}2x + c$

۴۰. $\int \mathrm{Cosh}^{3}x\,dx$

حل

$$\int \mathrm{Cosh}^{3}x\,dx=\int(1+\mathrm{Sinh}^{2}x)\mathrm{Cosh}x\,dx$$

$$=\mathrm{Sinh}x+\frac{1}{3}\mathrm{Sinh}^{3}x+c$$

۴۱. $\int \frac{\mathrm{Sinh}x}{1+\mathrm{Cosh}x}dx$

حل

$$\int \frac{\mathrm{Sinh}x}{1+\mathrm{Cosh}x}dx=\mathrm{Ln}(1+\mathrm{Cosh}x)+c$$

۴۲. $\int x^{2}\mathrm{Sinh}x\,dx$

حل

x^2		$\mathrm{Sinh}x$
x^2	$+$	$\mathrm{Sinh}x$
$2x$	$-$	$\mathrm{Cosh}x$
2	$+$	$\mathrm{Sinh}x$
0		$\mathrm{Cosh}x$

$$\int x^{2}\mathrm{Sinh}x\,dx=x^{2}\mathrm{Cosh}x-2x\mathrm{Sinh}x+2\mathrm{Cosh}x+c$$

۴۳. $\int x^{2}\mathrm{Cosh}x\,dx$

حل

x^2		$\mathrm{Cosh}x$
x^2	$+$	$\mathrm{Cosh}x$
$2x$	$-$	$\mathrm{Sinh}x$
2	$+$	$\mathrm{Cosh}x$
0		$\mathrm{Sinh}x$

$$\Rightarrow \int x^{2}\mathrm{Cosh}x\,dx=x^{2}\mathrm{Sinh}x-2x\mathrm{Cosh}\,x+2\mathrm{Sinh}x+c$$

۴۴. $\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx$

(راهنمایی: در تمرین ۴۴ صورت و مخرج انتگرالده را در e^{x} ضرب کنید.)

حل

$$\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx=\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$$

$$=\mathrm{Ln}\mid e^{x}+e^{-x}\mid\Big]_{0}^{\mathrm{Ln}2}=\mathrm{Ln}(2+\frac{1}{2})-\mathrm{Ln}(2)$$

$$=\mathrm{Ln}(\frac{5}{2})-\mathrm{Ln}(2)=\mathrm{Ln}(\frac{5}{4})$$

۴۵. $\int \mathrm{sech}^{3}5x\tanh 5x\,dx$

حل

$$\int \mathrm{sech}^{3}5x\tanh 5x\,dx=\int(\mathrm{sech}5x\tanh 5x)\mathrm{sech}^{2}5x\,dx$$

$$=\frac{-1}{15}\mathrm{sech}^{3}5x+c$$

۴۶. $\int \mathrm{csch}^{2}x\,\mathrm{coth}x\,dx$

حل

$$\int \mathrm{csch}^{2}x\,\mathrm{coth}x\,dx=\int(\mathrm{csch}x\,\mathrm{coth}x)\mathrm{csch}x\,dx$$

$$=\frac{-1}{2}\mathrm{csch}^{2}x+c$$

۴۷. الف ـ مطلوب است محاسبهٔ $\int \mathrm{csch}x\,dx$. برای انجام دادن این محاسبه، انتگرالده را در $\frac{\mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x}{\mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x}$ ضرب کنید و از نتیجهٔ حاصل، انتگرال بگیرید.

ب ـ نشان دهید پاسخی که در (الف) به دست آوردید، معادل است با پاسخ مسأله ۱۸.

حل

a) $$\int \mathrm{csch}x\,dx=\int \mathrm{csch}x\left(\frac{\mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x}{\mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x}\right)dx$$

$$=\int\frac{\mathrm{csch}^{2}x+\mathrm{csch}x\,\mathrm{coth}x}{\mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x}dx=-\mathrm{Ln}\mid \mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x\mid$$

b) $$-\mathrm{Ln}\mid\mathrm{csch}x+\mathrm{coth}x\mid+c=-\mathrm{Ln}\left|\frac{1}{\mathrm{Sinh}x}+\frac{\mathrm{Cosh}x}{\mathrm{Sinh}x}\right|+c$$

$$=-\mathrm{Ln}\left|\frac{1+\mathrm{Cosh}x}{\mathrm{Sinh}x}\right|+c=-\mathrm{Ln}\left|\frac{2\mathrm{Cosh}^{2}(\frac{x}{2})}{2\mathrm{Sinh}(\frac{x}{2})\mathrm{Cosh}(\frac{x}{2})}\right|+c$$

$$=-\mathrm{Ln}\left|\frac{\mathrm{Cosh}(\frac{x}{2})}{\mathrm{Sinh}(\frac{x}{2})}\right|+c=-\mathrm{Ln}\left|\coth(\frac{x}{2})\right|+c$$

$$=\mathrm{Ln}\left|\tanh(\frac{x}{2})\right|+c$$

۴۸. مساحت ناحیه‌ای نامتناهی را که در ربع اول و بین خمهای $y=\mathrm{Sinh}x$ و $y=\mathrm{Cosh}x$ واقع است، حساب کنید.

حل

$$\int_{0}^{\infty}(\mathrm{Cosh}x-\mathrm{Sinh}x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}(\mathrm{Cosh}x-\mathrm{Sinh}x)dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}-e^{-x}\Big]_{0}^{b}=1$$

۴۹. ناحیهٔ بین خمهای $y=\mathrm{Sinh}x$ و $y=\mathrm{Cosh}x$ و خطهای $x=0$ و $x=3$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی تولید می‌کند. حجم این جسم را بیابید.

حل

$$v=\pi\int_{a}^{b}\left[(f(x))^{2}-(g(x))^{2}\right]dx\Rightarrow v$$

$$=\pi\int_{0}^{3}(\mathrm{Cosh}^{2}x-\mathrm{Sinh}^{2}x)dx=3\pi$$

۵۰. مطلوب است طول خم $y=\mathrm{Cosh}x$، $0\le x\le 1$.

حل

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}\,dx\Rightarrow L=\int_{0}^{1}\sqrt{1+\mathrm{Sinh}^{2}x}\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\mathrm{Cosh}x\,dx=\mathrm{Sinh}x\Big]_{0}^{1}=\mathrm{Sinh}1$$

۵۱. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قوس $y=\mathrm{Cosh}x$، $0\le x\le \mathrm{Ln}2$، حول محور x پدید می‌آید.

حل

$$S=2\pi\int_{a}^{b}y\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}\mathrm{Cosh}x\sqrt{1+\mathrm{Sinh}^{2}x}\,dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}\mathrm{Cosh}^{2}x\,dx=\pi\int_{0}^{\mathrm{Ln}2}(\mathrm{Cosh}2x+1)dx$$

$$=\pi\left[x+\frac{\text{Sinh}\,2x}{2}\right]_0^{\text{Ln}\,2}=\pi\left[\text{Ln}\,2+\frac{4-\frac{1}{4}}{4}\right]=\pi\text{Ln}\,2+\frac{15\pi}{16}$$

۵۲. مطلوب است محاسبه حجم جسمی که از دوران کل خم $y=\text{sech}x$، $-\infty<x<\infty$، حول محور x پدید می‌آید.

حل

$$v=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\text{sech}^2x\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}\text{sech}^2x\,dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b\text{sech}^2x\,dx$$

$$=2\pi\lim_{b\to\infty}\tanh x\Big]_0^b=2\pi$$

۵۳. ناحیه‌ای در ربع اول واقع است و از پایین به محور x از چپ به خط $x=\text{Ln}\,2$، و از بالا به خم $y=\text{csch}x$ محدود است. حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x را بیابید.

حل

$$v=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{\text{Ln}\,2}^{\infty}\text{csch}^2x\,dx$$

$$=-\pi\lim_{b\to\infty}\coth x\Big]_{\text{Ln}\,2}^b=-\pi\left[1-\frac{e^{\text{ln}\,2}+e^{-\text{Ln}\,2}}{e^{\text{Ln}\,2}-e^{-\text{Ln}\,2}}\right]$$

$$=-\pi\left(1-\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

۵۴. فرض کنید R نشان دهندهٔ ناحیه‌ای در ربع اول باشد که بین خمهای $y=\text{Sinh}x$ و $y=\text{Cosh}x$ واقع است.

الف ـ یک حجم متناهی: حجمی را بیابید که با دوران R حول محور y پدید می‌آید.

ب ـ یک حجم نامتناهی: نشان دهید حجمی که با دوران R حول محور x پدید می‌آید، نامتناهی است.

حل

a) $$v=2\pi\int_a^b xf(x)dx=2\pi\int_0^{\infty}x(\text{Cosh}x-\text{Sinh}x)dx$$

$$=2\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^b=2\pi$$

b) $$v=\pi\int_a^b\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx$$

$$=\pi\int_0^{\infty}(\text{Cosh}^2x-\text{Sinh}^2x)dx=\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b dx=\infty$$

۵۵. با استفاده از فرمول انتگرال در مسأله ۱۷، مرکز جرم ورقهٔ همگن نازکی را بیابید که ناحیه متناهی محدود به محور x و خم $y=\text{sech}x$ را می‌پوشاند.

حل بنا بر تقارن $\bar{x}=0$ است.

$$M=\int_{-\infty}^{\infty}\text{sech}x\,dx=2\lim_{b\to\infty}\int_0^b\text{sech}x\,dx$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\text{Sin}^{-1}(\tanh x)\Big]_0^b=2\text{Sin}^{-1}(1)=2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\text{sech}^2x\,dx=\lim_{b\to\infty}\tanh x\Big]_0^b=1$$

$$\Rightarrow(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{1}{\pi}\right),\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}$$

۵۶. مطلوب است مرکز جرم سیم یکنواخت نازکی که در امتداد خم نازکی $y=\text{Cosh}x$، $0\le x\le\text{Ln}\,2$ قرار دارد.

حل

$$M=\int_a^b ds=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\text{Ln}\,2}\sqrt{1+\text{Sinh}^2x}\,dx$$

$$=\int_0^{\text{Ln}\,2}\text{Cosh}x\,dx=\text{Sinh}x\Big]_0^{\text{Ln}\,2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

$$M_y=\int_a^b x\,ds=\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\text{Ln}\,2}x\sqrt{1+\text{Sinh}^2x}\,dx$$

$$=\int_0^{\text{Ln}\,2}x\text{Cosh}x\,dx=(x\text{Sinh}x-\text{Cosh}x)\Big]_0^{\text{Ln}\,2}=\frac{3\text{Ln}\,2-1}{4}$$

$$M_x=\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\text{Ln}\,2}\text{Cosh}x\sqrt{1+\text{Sinh}^2x}\,dx$$

$$=\int_0^{\text{Ln}\,2}\text{Cosh}^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\text{Ln}\,2}(1+\text{Cosh}\,2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\text{Sinh}\,2x\right)\Big]_0^{\text{Ln}\,2}=\frac{\text{Ln}\,2+\frac{15}{16}}{2}$$

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{M}(M_y,M_x)=\frac{4}{3}\left(\frac{3\text{Ln}\,2-1}{4},\frac{\text{Ln}\,2+\frac{15}{16}}{2}\right)$$

۵۷. ناحیهٔ واقع در ربع اول بین خم $y=\tanh x$ و خط $y=1$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی نامتناهی پدید می‌آورد. حجم این جسم را بیابید.

حل

$$v=\pi\int_a^b\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx=\pi\int_0^{\infty}(1-\tanh^2x)dx$$

$$=\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b(1-\tanh^2x)dx=\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b\text{sech}^2x\,dx$$

$$=\pi\lim_{b\to\infty}\tanh x\Big]_0^b=\pi$$

۹.۴ تابعهای هیپربولیک معکوس

Inverse Hyperbolic Functions

Logarithm Formulas For Evaluating Inverse Hyperbolic functions.

$$\mathrm{Sinh}^{-1}x=\mathrm{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R$$

$$\mathrm{Cosh}^{-1}x=\mathrm{Ln}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geq 1$$

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1$$

$$\mathrm{sech}^{-1}x=\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ 0\leq x\leq 1$$

$$\mathrm{csch}^{-1}x=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)=\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0$$

$$\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x-1}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ |x|>1$$

$$\frac{d(\mathrm{Sinh}^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\mathrm{Cosh}^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx},\ u>1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{du}{dx},\ |u|<1$$

$$\frac{d(\coth^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{du}{dx},\ |u|>1$$

$$\frac{d(\mathrm{seh}^{-1}u)}{dx}=\frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}},\ 0<u<1$$

$$\frac{d(\mathrm{csch}^{-1}u)}{dx}=\frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{du}{dx},\ u\neq 0$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\mathrm{Ln}(u+\sqrt{u^2+a^2})+C=\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\mathrm{Ln}(u+\sqrt{u^2-a^2})+C=\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C & |u|<a\\ \frac{1}{a}\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C & |u|>a\end{cases}$$

در مسأله‌های ۱ـ۱۶، با استفاده از فرمولهای لگاریتمی که در متن آمده مقادیر مورد نظر را بیابید.

۱. $\mathrm{Sinh}^{-1}(0)$

حل $\mathrm{Sinh}^{-1}(0)=\mathrm{Ln}(0+\sqrt{0+1})=\mathrm{Ln}\,1=0$

۲. $\mathrm{Sinh}^{-1}(3/4)$

حل $\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}+1}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{3+5}{4}\right)=\mathrm{Ln}\,2$

۳. $\mathrm{Sinh}^{-1}(-4/3)$

حل $\mathrm{Sinh}^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{Ln}\left(-\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}+1}\right)=\mathrm{Ln}\frac{1}{3}=-\mathrm{Ln}\,3$

۴. $\mathrm{Sinh}^{-1}(-5/12)$

حل $\mathrm{Sinh}^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{-5}{12}+\sqrt{\frac{25}{144}+1}\right)=\mathrm{Ln}\frac{2}{3}$

۵. $\mathrm{Cosh}^{-1}(5/4)$

حل $\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}-1}\right)=\mathrm{Ln}\,2$

۶. $\mathrm{Cosh}^{-1}(5/3)$

حل $\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{25}{9}-1}\right)=\mathrm{Ln}\,3$

۷. $\mathrm{Cosh}^{-1}(2/\sqrt{3})$

حل $\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{4}{3}-1}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,3$

۸. $\mathrm{Cosh}^{-1}(13/12)$

حل $\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{13}{12}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{13}{12}+\sqrt{\frac{169}{144}-1}\right)=\mathrm{Ln}\frac{3}{2}$

۹. $\tanh^{-1}(1/2)$

حل $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,3$

۱۰. $\coth^{-1}(5/4)$

حل $\coth^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1}=\mathrm{Ln}\,3$

۱۱. $\coth^{-1}(-2)$

حل $\coth^{-1}(-2)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}\,3$

۱۲. $\tanh^{-1}(-3/5)$

حل $\tanh^{-1}\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{-\frac{3}{5}+1}{1+\frac{3}{5}}=-\mathrm{Ln}\,2$

۱۳. $\mathrm{sech}^{-1}(3/5)$

حل $\mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{3}{15}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)$

$=\mathrm{Ln}\left(\frac{9}{3}\right)=\mathrm{Ln}\,3$

۱۴. $\operatorname{sech}^{-1}(4/5)$

حل
$$\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{\frac{4}{5}}\right)=\operatorname{Ln}2$$

۱۵. $\operatorname{csch}^{-1}(5/12)$

حل
$$\operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)=\operatorname{Ln}\left(\frac{12}{5}+\frac{\sqrt{1+\frac{25}{144}}}{\frac{5}{12}}\right)=\operatorname{Ln}5$$

۱۶. $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

حل
$$\operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{Ln}\left(-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)=\operatorname{Ln}(-\sqrt{3}+2)$$

در مسأله‌های ۱۷ـ۳۲، dy/dx را بیابید.

۱۷. $y=\operatorname{Sinh}^{-1}(2x)$

حل
$$y'=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$$

۱۸. $y=\tanh^{-1}(\operatorname{Cos}x)$

حل
$$y'=\frac{-\operatorname{Sin}x}{1-\operatorname{Cos}^2x}=\frac{-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Sin}^2x}=-\csc x$$

۱۹. $y=\operatorname{Cosh}^{-1}(\sec x)$

حل
$$y'=\frac{\sec x\tan x}{\sqrt{\sec^2x-1}}=\frac{\sec x\tan x}{\tan x}=\sec x$$

۲۰. $y=\coth^{-1}(\sec x)$

حل
$$y'=\frac{\sec x\tan x}{1-\sec^2x}=\frac{-\sec x\tan x}{\tan^2x}=-\csc x$$

۲۱. $y=\operatorname{sech}^{-1}(\operatorname{Sin}2x)$

حل
$$y'=\frac{-2\operatorname{Cos}2x}{\operatorname{Sin}2x\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2 2x}}=-2\csc 2x$$

۲۲. $y=\operatorname{Cosh}^{-1}x^2$

حل
$$y'=\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$$

۲۳. $y=\operatorname{Sinh}^{-1}\sqrt{x-1}$

حل
$$y'=\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x-1})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$$

۲۴. $y=\operatorname{csch}^{-1}(\tan x)$

حل
$$y'=\frac{-\sec^2x}{|\tan x|\sqrt{1+\tan^2x}}=\frac{-\sec^2x}{|\tan x|\sec x}=-|\csc x|$$

۲۵. $y=\operatorname{Sinh}^{-1}(1/x)$

حل
$$y'=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}=\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

۲۶. $y=\operatorname{Cosh}^{-1}\sqrt{x+1}$

حل
$$y'=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x+1})^2-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$$

۲۷. $y=\operatorname{Sinh}^{-1}(\tan x)$

حل
$$y'=\frac{\sec^2x}{\sqrt{1+\tan^2x}}=\frac{\sec^2x}{\sec x}=\sec x$$

۲۸. $y=\coth^{-1}(\csc x)$

حل
$$y'=\frac{-\csc x.\cot x}{1-\csc^2x}=\frac{\csc x.\cot x}{\cot^2x}=\sec x$$

۲۹. $y=\sqrt{1+x^2}-\operatorname{Sinh}^{-1}\frac{1}{x}$

حل
$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

۳۰. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\operatorname{Cosh}^{-1}x$

حل
$$y'=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\frac{x^2-1+x^2-1}{2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}$$

۳۱. $y=2\operatorname{Cosh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$

حل
$$y'=2.\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}$$

۳۲. $y=x^2\operatorname{sech}^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$

حل
$$y'=2x\operatorname{sech}^{-1}x-\frac{x^2}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=2x\operatorname{sech}^{-1}x$$

در مسأله‌های ۳۳ـ۴۶، انتگرالها را حساب کنید. با استفاده از فرمولهای لگاریتمی در معادلات (۱۱) محاسبهٔ انتگرالهای معین را به انجام برسانید.

۳۳. $\int_0^{4/3}\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

حل
$$\int_0^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\Big]_0^{\frac{4}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left[(8+\sqrt{73})/3\right]$$

۳۴. $\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

حل
$$\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\operatorname{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\Big]_0^{2\sqrt{3}}$$
$$=\operatorname{Ln}(2\sqrt{3}+\sqrt{16})-\operatorname{Ln}(2)=\operatorname{Ln}(2(\sqrt{3}+2))-\operatorname{Ln}2$$

$$=\mathrm{Ln}\left(\frac{2(2+\sqrt{3})}{2}\right)=\mathrm{Ln}(2+\sqrt{3})$$

۳۵. $\int_0^{0/5}\frac{dx}{1-x^2}$

حل
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+x}{1-x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}3$$

۳۶. $\int_{5/4}^{2}\frac{dx}{1-x^2}$

حل
$$\int_{\frac{5}{4}}^{2}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+x}{1-x}\Big]_{\frac{5}{4}}^{2}=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}3$$

۳۷. $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

حل
$$\int_a^b\frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{-1}{a}\mathrm{Ln}\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right|\Big]_a^b$$

$$\Rightarrow\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{2+\sqrt{4+x^2}}{x}\right|\Big|_1^2=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}\frac{(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{5})}$$

۳۸. $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{Cos}x}{\sqrt{1+\mathrm{Sin}^2x}}dx$

حل
$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{Cos}x\,dx}{\sqrt{1+\mathrm{Sin}^2x}}=\int_0^0\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=0$$

۳۹. $\int_{-1}^{1}\mathrm{Sinh}^{-1}x\,dx$

حل انتگرالده تابعی فرد و بازه انتگرالگیری متقارن است پس جواب صفر است

۴۰. $\int_0^{1/2}\tanh^{-1}x\,dx$

حل
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\tanh^{-1}x\,dx=x\tanh^{-1}x\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\,dx}{1-x^2}$$

$$=x\tanh^{-1}x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1-x^2)\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x\mathrm{Ln}\frac{1+x}{1-x}$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1-x)^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\mathrm{Ln}3-\mathrm{Ln}2$$

۴۱. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$

حل
$$\int\sqrt{u^2+a^2}=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{Ln}(u+\sqrt{u^2+a^2})+c$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{x^2+1}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})+c$$

۴۲. $\int(x^2+1)^{3/2}dx$

حل راهنمایی $x=\tan u$

۴۳. $\int_2^5 4x\coth^{-1}x\,dx$

حل
$$\begin{cases}u=\coth^{-1}x\Rightarrow du=\frac{dx}{1-x^2}\\ dv=4x\,dx\Rightarrow v=2x^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_2^5 4x\coth^{-1}x\,dx=2x^2\coth^{-1}x\Big]_2^5-2\int_2^5\frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$=2x^2\coth^{-1}x\Big]_2^5+2\int_2^5\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$=2x^2\coth^{-1}x\Big]_2^5+2(x-\coth^{-1}x)\Big]_2^5$$

$$=2\coth^{-1}x(x^2-1)+2x\Big]_2^5=24\mathrm{Ln}\frac{3}{2}-3\mathrm{Ln}3+6$$

۴۴. $\int_{3/5}^{4/5}2x\,\mathrm{sech}^{-1}x\,dx$

حل
$$\begin{cases}u=\mathrm{sech}^{-1}x\Rightarrow du=\frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}}\\ dv=2x\,dx\Rightarrow v=x^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}}2x\,\mathrm{sech}^{-1}x\,dx=x^2\mathrm{sech}^{-1}x\Big]_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}}+\int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x^2\mathrm{sech}^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\Big]_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}}$$

۴۵. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

حل
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}=\mathrm{Cosh}^{-1}(x-2)$$

۴۶. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$

حل
$$\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}=\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$$

$$=\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2-1}+\mathrm{Cosh}^{-1}(x-2)+c$$

در مسأله‌های ۴۷ـ۴۹، با استفاده از جانشانیهای مثلثاتی انتگرالها را حساب کنید.

۴۷. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}},\ u\geq 1$

حل
$$u=\sec x\Rightarrow du=\sec x\tan x\,dx\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}\,dx = \int \frac{\sec x \tan x}{\tan x}\,dx = \int \sec x\,dx$$

$$= \mathrm{Ln}\,|\sec x + \tan x| + c = \mathrm{Ln}\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| + c$$

۴۸. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$

حل $u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x\,dx \Rightarrow \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$

$$= \frac{\sec x \tan x}{\sec x \sqrt{\sec^2 x - 1}}\,dx = \int dx = x + c = \sec^{-1} u + c$$

۴۹. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + 1}}$

حل $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx \Rightarrow \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + 1}}$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan x \sqrt{\tan^2 x + 1}}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan x \sec x}\,dx = \int \csc x\,dx$$

$$= -\mathrm{Ln}\,|\csc x + \cot x| + c = -\mathrm{Ln}\left|\frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u}\right| + c$$

۵۰. انتگرال زیر را به کمک کسرهای ساده محاسبه کنید.

$$\int \frac{du}{1 - u^2}$$

حل $\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u}\right) du$

$$= \frac{1}{2}\{\mathrm{Ln}\,|1 + u| - \mathrm{Ln}\,|1 - u|\} + c = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + c$$

در مسأله‌های ۵۱-۵۶، انتگرلها را به کمک جداول حساب کنید.

۵۱. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\,dx$

حل $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + c$

۵۲. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2}\,dx$

حل $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + c$

۵۳. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 25}}\,dx$

حل $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + c$

۵۴. $\int x^2\sqrt{x^2 + 3}\,dx$

حل $\int x^2\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x(a^2 + 2x^2)\sqrt{a^2 + x^2}}{8}$

$$- \frac{a^4}{8}\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

۵۵. $\int \sqrt{x^2 - 4}\,dx$

حل $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

۵۶. $\int x^2\sqrt{x^2 - 4}\,dx$

حل $\int x^2\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\mathrm{Cosh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

۵۷. طول خم $y = x^2$، $0 \le x \le 1$ را بیابید. (برای محاسبهٔ انتگرال از جدول استفاده کنید.)

حل $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}\,dx = x\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{2}{8}\mathrm{Sin}^{-1} 2x\Big]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{Ln}(2 + \sqrt{5})$$

۵۸. مساحت رویه‌ای را که از دوران خم $y = x^2$، $0 \le x \le 1$ حول محور x پدید می‌آید، پیدا کنید. (برای محاسبه انتگرال از جدول استفاده کنید.)

حل $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$$

با استفاده از جدول می‌توانید انتگرال فوق را به سادگی محاسبه کنید.

۵۹. طول خم $y = \mathrm{Ln}x$، $3/4 \le x \le 1$ را بیابید. (برای محاسبهٔ انتگرال از جدول کمک بگیرید.)

حل $L = \int_{3/4}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{3/4}^1 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\,dx$

$$= \left[\sqrt{x^2 + 1} - \mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{3/4}^1 = \sqrt{2} - \frac{5}{4} - \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{2}) + \mathrm{Ln}3$$

۶۰. معادلهٔ $x = \mathrm{Sinh}y = (e^y - e^{-y})/2$ را نسبت به e^y بر حسب x حل کنید، و به این ترتیب نشان دهید که $y = \mathrm{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (این معادله، $\mathrm{Sinh}^{-1}x$ را به صورت یک لگاریتم بیان می‌کند.)

حل $2x = e^y - e^{-y} \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Rightarrow e^y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 1}}{1}$

$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \mathrm{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \mathrm{Sinh}^{-1}x$$

۶۱. $\mathrm{Cosh}^{-1}x$ را با استفاده از روش مسأله ۴۳ به صورت یک لگاریتم بیان کنید.

حل $y = \mathrm{Cosh}^{-1}x \Rightarrow x = \mathrm{Cosh}y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow e^y + e^{-y} = 2x$

$$\Rightarrow e^{2y}-2xe^{y}+1=0 \Rightarrow e^{y}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-1}}{1}$$

$$\Rightarrow e^{y}=x+\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-1})$$

مسأله‌های گوناگون

MISCELLANEOUS PROBLEMS

۱. اتحاد هیپربولیک $\mathrm{Cosh}\,2x=\mathrm{Cosh}^2x+\mathrm{Sinh}^2x$ را ثابت کنید.

حل
$$\mathrm{Cosh}^2x+\mathrm{Sinh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}[e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}+e^{-2x}-2)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=\mathrm{Cosh}\,2x$$

۲. تحقیق کنید که $\tanh x=\mathrm{Sinh}\,2x/(1+\mathrm{Cosh}\,2x)$.

حل
$$\frac{\mathrm{Sinh}\,2x}{1+\mathrm{Cosh}\,2x}=\frac{2\mathrm{Sinh}x\mathrm{Cosh}x}{2\mathrm{Cosh}^2x}=\frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x}=\tanh x$$

۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{Cosh}x-\mathrm{Sinh}x)$

حل
$$\lim_{x\to\infty}(\mathrm{Cosh}x-\mathrm{Sinh}x)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

۴. اگر $\mathrm{Cosh}x=5/4$، مطلوب است محاسبهٔ $\mathrm{Sinh}x$ و $\tanh x$.

حل
$$\mathrm{Sinh}x=\pm\sqrt{\mathrm{Cosh}^2x-1}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\pm\frac{3}{4}$$
$$\tanh x=\frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x}=\pm\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\pm\frac{3}{5}$$

۵. اگر $\mathrm{csch}x=-9/40$، مطلوب است محاسبهٔ csch و $\tanh x$

حل
$$\mathrm{csch}x=\frac{9}{-40}\Rightarrow\mathrm{Sinh}x=\frac{-40}{9}\Rightarrow\mathrm{Cosh}x=\sqrt{1+\frac{1600}{81}}=\frac{41}{9}$$
$$\Rightarrow\tanh x=\frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x}=\frac{-40}{41}$$

۶. معادلات پارامتری نیمدایرهٔ $x^2+y^2=a^2,\ y>0$ را بیابید، به این منظور، متغیر t را که با معادلهٔ $x=a\tanh t$ تعریف می‌شود به عنوان پارامتر در نظر بگیرید.

حل
$$a^2\tanh^2t+y^2=a^2 \Rightarrow y^2=a^2(1-\tanh^2t)$$
$$\Rightarrow y^2=a^2\mathrm{sech}^2t\Rightarrow y=a\,\mathrm{sech}\,t$$

۷. مطلوب است معادلات مجانبهای هذلولیی که با معادلهٔ $y=\tanh((1/2)\mathrm{Ln}x)$ نشان داده می‌شود.

حل
$$y=\tanh\left(\frac{\mathrm{Ln}x}{2}\right)=\tanh(\mathrm{Ln}\sqrt{x})$$
$$=\frac{e^{\mathrm{Ln}\sqrt{x}}-e^{-\mathrm{Ln}\sqrt{x}}}{e^{\mathrm{Ln}\sqrt{x}}+e^{-\mathrm{Ln}\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow$$

$x=-1$ مجانب قائم است چون مخرج را صفر می‌کند و

پس $y=1$ مجانب افقی است $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$

۸. نشان دهید که $y=\mathrm{Cosh}\,2x,\ \mathrm{Sinh}\,2x,\ \mathrm{Cos}\,2x,\ \mathrm{Sin}\,2x$ همگی در رابطهٔ $d^4y/dx^4=16y$ صادق اند.

حل ساده و به خواننده محترم واگذار می‌گردد.

۹. نمودار تابع زیر را رسم کنید. $y=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}$

حل
$$y=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=\tanh^{-1}(\tanh x)=x$$
یعنی نمودار $y=x$ است.

در مسأله‌های ۱۰ـ۱۹، dy/dx را بیابید.

۱۰. $y=\mathrm{Sinh}^2 3x$

حل
$$y'=2(3)\mathrm{Sinh}\,3x\mathrm{Cosh}\,3x=6\mathrm{Sinh}\,3x\mathrm{Cosh}\,3x$$

۱۱. $\tan x=\tanh^2 y$

حل
$$\sec^2x=2y'\mathrm{sech}^2y\tanh y\Rightarrow y'=\frac{\sec^2x}{2\tanh y\,\mathrm{sech}^2y}$$

۱۲. $\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{sech}\,y$

حل
$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\mathrm{sech}\,y\tanh y\,dy$$
$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{sech}\,y\tanh y}$$

۱۳. $\mathrm{Sinh}\,y=\sec x$

حل
$$\mathrm{Cosh}\,y\,dy=\sec x\tan x\,dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sec x\tan x\,\mathrm{sech}\,y$$

۱۴. $\tan^{-1}y=\tanh^{-1}x$

حل
$$\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1-x^2}dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1-x^2}$$
$$=\frac{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}{1-x^2}=\frac{\sec^2(\tanh^{-1}x)}{1-x^2}$$

۱۵. $y=\tanh(\mathrm{Ln}x)$

حل
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{sech}^2(\mathrm{Ln}x)}{x}$$

۱۶. $x=\mathrm{Cosh}(\mathrm{Ln}y)$

حل
$$x=\mathrm{Cosh}(\mathrm{Ln}y)\Rightarrow\mathrm{Cosh}^{-1}x=\mathrm{Ln}y\Rightarrow y=e^{\mathrm{Cosh}^{-1}x}$$
$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\mathrm{Cosh}^{-1}x}}{\sqrt{x^2-1}}$$

۱۷. $y=\mathrm{Sinh}(\tan^{-1}e^{3x})$

حل
$$\frac{dy}{dx}=3e^{3x}.\frac{1}{1+(e^{3x})^2}\mathrm{Cosh}(\tan^{-1}(e^{3x}))$$
$$=\frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}\mathrm{Cosh}\left(\tan^{-1}(e^{3x})\right)$$

۱۸. $y=\mathrm{Sin}^{-1}(\tan x)$

حل
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2x}{\sqrt{1+\tan^2x}}=\frac{\sec^2x}{\sec x}=\sec x$$

۱۹. $y^2+x\mathrm{Cosh}\,y+\mathrm{Sinh}^2x=50$

حل
$$2yy'+\mathrm{Cosh}\,y+y'x\mathrm{Sinh}\,y+2\mathrm{Sinh}x\mathrm{Cosh}x=0$$
$$\Rightarrow y'=-\frac{\mathrm{Sinh}\,2x+\mathrm{Cosh}x}{x\mathrm{Sinh}\,y+2y}$$

در مسأله‌های ۲۰ـ۲۹، انتگرال را محاسبه کنید.

۲۰. $\displaystyle\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}\frac{d\theta}{\mathrm{Sinh}\theta+\mathrm{Cosh}\theta}$

حل: $\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}\left(\frac{1}{\mathrm{Sinh}\theta+\mathrm{Cosh}\theta}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{Cosh}\theta-\mathrm{Sinh}\theta}{\mathrm{Cosh}\theta-\mathrm{Sinh}\theta}\right)d\theta$

$$\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}\frac{\mathrm{Cosh}\theta-\mathrm{Sinh}\theta}{\mathrm{Cosh}^2\theta-\mathrm{Sinh}^2\theta}d\theta=\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}(\mathrm{Cosh}\theta-\mathrm{Sinh}\theta)d\theta$$

$$=\Big(\mathrm{Sinh}\theta-\mathrm{Cosh}\theta\Big)_{-\mathrm{Ln}2}^{0}=-e^{-\theta}\Big]_{-\mathrm{Ln}2}^{0}=2-1=1$$

۲۱. $\int_{-\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}2}\frac{\mathrm{Cosh}\theta d\theta}{\mathrm{Sinh}\theta+\mathrm{Cosh}\theta}$

حل: $\frac{\mathrm{Cosh}\theta}{\mathrm{Sinh}\theta+\mathrm{Cosh}\theta}=\frac{\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}}{\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}+\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}}=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2e^{\theta}}=\frac{1}{2}(1+e^{-2\theta})$

$$\Rightarrow\int_{-\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}2}\frac{\mathrm{Cosh}\theta}{\mathrm{Sinh}\theta+\mathrm{Cosh}\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}2}(1+e^{-2\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right]_{-\mathrm{Ln}2}^{\mathrm{Ln}2}=\mathrm{Ln}2+\frac{15}{16}$$

۲۲. $\int_{0}^{(\mathrm{Ln}3)/2}\mathrm{Sinh}^3x\,dx$

حل: $\int_{0}^{\frac{\mathrm{Ln}3}{2}}\mathrm{Sinh}^3x\,dx=\int_{0}^{\frac{\mathrm{Ln}3}{2}}(\mathrm{Cosh}^2x-1)\mathrm{Sinh}x\,dx$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Cosh}^3x-\mathrm{Cosh}x\Big]_{0}^{\frac{\mathrm{Ln}3}{2}}=\frac{18-10\sqrt{3}}{27}$$

۲۳. $\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}e^{x}\,\mathrm{Sinh}2x\,dx$

حل: $\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}e^{x}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\mathrm{Ln}2}^{0}(e^{3x}-e^{-x})dx$

$$=\frac{e^{3x}}{6}+\frac{e^{-x}}{2}\Big]_{-\mathrm{Ln}2}^{0}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{48}+1\right)=\frac{8+24-1-48}{48}=\frac{-17}{48}$$

۲۴. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ (راهنمایی: صورت و مخرج را در e^{-x} ضرب کنید)

حل: $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx=\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}dx=\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{Sinh}x}{\mathrm{Cosh}x}dx$

$$=\mathrm{Ln}\,|\,\mathrm{Cosh}x\,|\,\Big]_{1}^{\sqrt{2}}=\mathrm{Ln}\mathrm{Cosh}\sqrt{2}-\mathrm{Ln}\mathrm{Cosh}1$$

۲۵. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{4-x^2}$

حل: $\int_{0}^{1}\frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}3$

۲۶. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ (راهنمایی: فرض کنید $y=\sqrt{x}$)

حل: $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}=\lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}+$

$$\lim_{b\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$$

اما داریم

$$\lim_{b\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}=\lim_{b\to 1^-}\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{b}\frac{2du}{1-u^2}$$

$$=2\lim_{b\to 1^-}\tanh^{-1}u\Big]_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{b}\to\infty$$

چون یکی از دو انتگرال فوق واگراست پس در کل انتگرال داده شده نیز واگراست.

۲۷. $\int_{0}^{\mathrm{Ln}(3/4)}\frac{e^{t}dt}{\sqrt{2+e^{2t}}}$

حل: $\int_{0}^{\mathrm{Ln}(\frac{3}{4})}\frac{e^{t}}{\sqrt{2+e^{2t}}}dt=\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{e^{t}}{\sqrt{2}}\right)_{0}^{\mathrm{Ln}(\frac{3}{4})}$

$$=\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)-\mathrm{Sinh}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

۲۸. $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\mathrm{Sin}x\,dx}{1-\mathrm{Cos}^2x}$

حل: $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Sin}x\,dx}{1-\mathrm{Cos}^2x}=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{1-u^2}=-\tanh^{-1}u\Big]_{\frac{1}{2}}^{0}$

$$=\tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Ln}\sqrt{3}$$

۲۹. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta-1}}$

حل: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\tan^2\theta-1}}d\theta=\mathrm{Cosh}^{-1}(\tan\theta)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$\mathrm{Cosh}^{-1}\sqrt{3}-\mathrm{Cosh}^{-1}1=\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

۳۰. حد $\mathrm{Cosh}^{-1}x-\mathrm{Ln}x$ را وقتی $x\to\infty$ بیابید.

حل: $\lim_{x\to\infty}(\mathrm{Cosh}^{-1}x-\mathrm{Ln}x)=\lim_{x\to\infty}\left[\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-1})-\mathrm{Ln}x\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\mathrm{Ln}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

$$=\mathrm{Ln}\left(1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\mathrm{Ln}(1+1)=\mathrm{Ln}2$$

۳۱. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty}\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{t}\right)dt$

حل

$$\lim_{x\to\infty}\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}-\frac{1}{t}\right)dt=\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{Sinh}^{-1}t-\operatorname{Ln}t\right)\Big]_{1}^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{Sinh}^{-1}x-\operatorname{Ln}x-\operatorname{Sinh}^{-1}1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^{2}+1})-\operatorname{Ln}x-\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})\right)$$

$$=\operatorname{Ln}2-\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})=\operatorname{Ln}\left(\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)$$

فصل دهم
مختصات قطبی

CHAPTER 10. Polar Coordinates

۱.۱۰ دستگاه مختصات قطبی
The polar coordinate system

تمام زاویه‌ها بر حسب رادیان هستند.

۱. دسته‌هایی از جفت‌های مختصات زیر را که هر دسته نشان دهندهٔ نقطهٔ واحدی باشد، مشخص کنید.

الف ـ $(3,0)$ ب ـ $(-3,0)$ پ ـ $(-3,\pi)$

ت ـ $(-3,2\pi)$ ث ـ $(2,2\pi/3)$ ج ـ $(2,-\pi/3)$

چ ـ $(2,7\pi/3)$ ح ـ $(-2,\pi/3)$ خ ـ $(2,-\pi/3)$

د ـ $(2,-2\pi/3)$ ذ ـ $(-2,-\pi/3)$ ر ـ $(-2,2\pi/3)$

ز ـ (r,θ) ژ ـ $(r,\theta+\pi)$ س ـ $(-r,\theta+\pi)$

ش ـ $(-r,\theta)$

حل از آنجا که نمایش نقطه‌های $(r,\theta\pm 2\pi n)$ و $(-r,\theta-\pi+2n\pi)$ به ازای $n=0,\pm1,\pm2,...$ در مختصات قطبی یکسان هستند. می‌توانید بررسی کنید که جفتهای زیر برابرند الف، پ ـ ب، ت ـ ث، د، ذ ـ ج، ح، ر ـ ز، س ـ ژ، ش.

۲. مختصات دکارتی نقاطی را که مختصات قطبی‌شان در قسمتهای (الف) ـ (ر) مسأله ۱ داده شده است پیدا کنید.

حل

$$a)\ \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3\cos(0)=3 \\ y=3\sin(0)=0 \end{cases}$$

$$R)\ \begin{cases} x=r\cos\theta=-2\cos(\frac{2\pi}{3})=(-2)(\frac{-1}{2})=1 \\ y=r\sin\theta=-2\sin(\frac{2\pi}{3})=-2(\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3} \end{cases}$$

۳. نقاط زیر را (که بر حسب مختصات قطبی داده شده‌اند) مشخص کنید. سپس همهٔ مختصات قطبی هر یک از نقاط را بیابید.

الف ـ $(2,\pi/2)$ ب ـ $(2,0)$

پ ـ $(-2,\pi/2)$ ت ـ $(-2,0)$

حل

$$a)\ \begin{cases} (2,\frac{\pi}{2})=(2,\frac{\pi}{2}+2n\pi),\ n=\pm1,\pm2,... \\ (2,\frac{\pi}{2})=(-2,\frac{\pi}{2}-\pi+2\pi n)=(-2,-\frac{\pi}{2}+2\pi n),\ n\in z \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} (2,0)=(2,0+2n\pi),\ n\in z \\ (2,0)=(-2,-\pi-0+2\pi n) \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} (-2,\frac{\pi}{2})=(-2,\frac{\pi}{2}+2\pi n),\ n\in z \\ (-2,\frac{\pi}{2})=(+2,+\pi+\frac{\pi}{2}+2\pi n)=(2,\frac{3\pi}{2}+2\pi n) \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} (-2,0)=(-2,2\pi n),\ n\in z \\ (-2,0)=(2,\pi+2n\pi) \end{cases}$$

۴. نقاط زیر را (که بر حسب مختصات قطبی داده شده‌اند) مشخص کنید. سپس همهٔ مختصات قطبی هر یک از نقاط را بیابید.

الف ـ $(3,\pi/4)$ ب ـ $(-3,\pi/4)$

پ ـ $(3,-\pi/4)$ ت ـ $(-3,-\pi/4)$

حل از فرمولهای زیر استفاده کنید.

$$(r,\theta)=(r,\theta+2\pi n),\quad n=\pm1,\pm2,...$$
$$(r,\theta)=(-r,\theta-\pi+2\pi n),\quad n=\pm1,\pm2,...$$
$$(3,\frac{\pi}{4})=(3,\frac{\pi}{4}+2\pi n),\quad n=\pm1,\pm2,...$$
$$(3,\frac{\pi}{4})=(-r,\frac{-3\pi}{4}+2\pi n),$$

۵. مختصات دکارتی نقاط زیر را (که بر حسب مختصات قطبی داده شده‌اند) پیدا کنید.

الف ـ $(\sqrt{2},\pi/4)$ ب ـ $(1,0)$

پ ـ $(0,\pi/2)$ ث ـ $(-\sqrt{2},\pi/4)$

ث ـ $(-3,5\pi/6)$ ج ـ $(5,\tan^{-1}(4/3))$

چ ـ $(-1,7\pi)$ ح ـ $(2\sqrt{3},2\pi/3)$

حل از روابط $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ استفاده کنید.

$$\text{الف)}\ \begin{cases} x=r\cos\theta=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})=1 \\ y=r\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})=1 \end{cases}$$

$$\text{ح)}\ \begin{cases} x=r\cos\theta=2\sqrt{3}\cos(\frac{2\pi}{3})=2\sqrt{3}(\frac{-1}{2})=-\sqrt{3} \\ y=r\sin\theta=2\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3})=2\sqrt{3}(\frac{1}{2})=\sqrt{3} \end{cases}$$

۶. همهٔ مختصات قطبی مبدأ را بیابید.

نمودار مجموعه‌های نقاطی را که مختصات قطبی آنها در معادله‌ها و نامعادله‌های مسائل ۷ـ۲۲ صدق می‌کنند، بکشید.

حل

۷. $r=2$

حل $r=2\Rightarrow x^2+y^2=r^2=4\Rightarrow x^2+y^2=4$

دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲.

۸. $0 \le r \le 2$

حل

$0 \le r \le 2 \Rightarrow 0 \le x^2+y^2 \le 4$

ناحیه داخل ورودی دایره $x^2+y^2=4$

۹. $r \ge 1$

حل

$r \ge 1 \Rightarrow x^2+y^2 \ge 1$

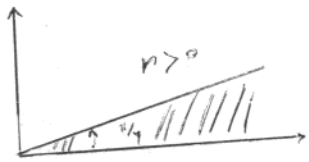
۱۰. $0 \le r \le 2$

حل

$1 \le r \le 2 \Rightarrow 1 \le x^2+y^2 \le 4$

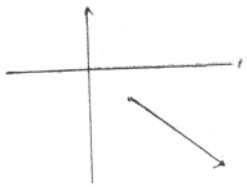
۱۱. $0 \le \theta \le \pi/6,\ r \ge 0$

حل



۱۲. $\theta = 2\pi/3,\ r \le -2$

حل

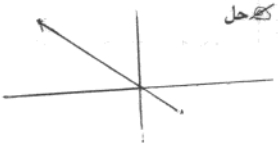


۱۳. $\theta = \pi/3,\ -1 \le r \le 3$

حل

۱۴. $\theta = 11\pi/4,\ r \ge -1$

حل

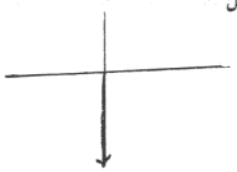


۱۵. $\theta = \pi/2,\ r \ge 0$

حل

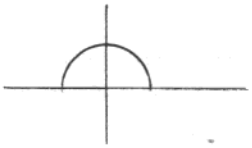
۱۶. $\theta = \pi/2.\ r \le 0$

حل



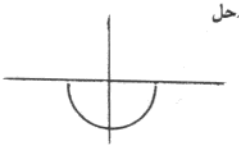
۱۷. $0 \le \theta \le \pi,\ r = 1$

حل



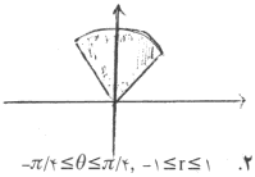
۱۸. $0 \le \theta \le \pi,\ r = -1$

حل



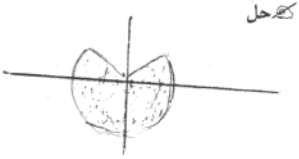
۱۹. $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4,\ 0 \le r \le 1$

حل



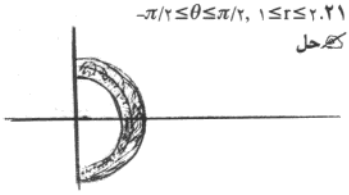
۲۰. $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4,\ -1 \le r \le 1$

حل



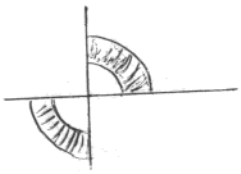
۲۱. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 1 \le r \le 2$

حل



۲۲. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 1 \le |r| \le 2$

حل



معادله‌های قطبی مذکور در مسأله‌های ۲۳ ـ ۴۰ را به معادله‌های دکارتی هم ارز تبدیل کنید. سپس نمودار این معادله‌ها را بکشید.

۲۳. $r\cos\theta = 2$

حل از فرمولهای $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ استفاده می‌کنیم.

$r\cos\theta = 2 \Rightarrow x = 2$

۲۴. $r\sin\theta = -1$

حل $r\sin\theta = -1 \Rightarrow y = -1$

۲۵. $r\sin\theta = 4$

حل $r\sin\theta = 4 \Rightarrow y = 4$

۲۶. $r\cos\theta = 0$

حل $r\cos\theta = 0 \Rightarrow x = 0$

۲۷. $r\sin\theta = 0$

حل $r\sin\theta = 0 \Rightarrow y = 0$

۲۸. $r\cos\theta = -3$

حل $x = -3$

۲۹. $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

حل $x + y = 1$

۳۰. $r\sin\theta = r\cos\theta$

حل $x = y$

۳۱. $r^2 = 1$

حل $r^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$
$= x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

۳۲. $r^2 = 4r\sin\theta$

حل $x^2 + y^2 = 4y$

۳۳. $r\sin\theta = e^{r\cos\theta}$

حل $y = e^x$

۳۴. $r^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta = 1$

حل $x^2 + y^2 + 2xy = 1 \Rightarrow (x+y)^2 = 1 \Rightarrow x + y = \pm 1$

۳۵. $r = \dfrac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}$

حل $r = \dfrac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta} \Rightarrow r\sin\theta - 2r\cos\theta = 5 \Rightarrow y - 2x = 5$

۳۶. $r = 4\cos\theta$

حل $r = 4\cos\theta \Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x$

۳۷. $r = 4\sin\theta$

حل $r = 4\sin\theta \Rightarrow r^2 = 4r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y$

۳۸. $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$

حل $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta + 2r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y$

۳۹. $r = 4\tan\theta\sec\theta$

حل $r = 4\tan\theta.\sec\theta = \dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow r\cos^2\theta = 4\sin\theta$

$\Rightarrow r^2\cos^2\theta = 4r\sin\theta \Rightarrow x^2 = 4y$

۴۰. $r + \sin\theta = 2\cos\theta$

حل $r + \sin\theta = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 + r\sin\theta = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 + y = 2x$

معادله‌های دکارتی مذکور درمسأله‌های ۴۱ـ۵۰ را به معادلات قطبی هم ارز تبدیل کنید.

به جای x، $r\cos\theta$ و به جای y، $r\sin\theta$ قرار دهید داریم:

۴۱. $x = 7$

حل $x = 7 \Rightarrow r\cos\theta = 7$

۴۲. $y = 1$

حل $y = 1 \Rightarrow r\sin\theta = 1$

۴۳. $x = y$

حل $r\cos\theta = r\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

۴۴. $x - y = 3$

حل $x - y = 3 \Rightarrow r(\cos\theta - \sin\theta) = 3 \Rightarrow r = \dfrac{3}{\cos\theta - \sin\theta}$

۴۵. $x^2 + y^2 = 4$

حل $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

۴۶. $x^2 - y^2 = 1$

حل $x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta \Rightarrow r^2\cos 2\theta = 1$

۴۷. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

حل $\dfrac{r^2\cos^2\theta}{9} + \dfrac{r^2\sin^2\theta}{4} = 1$

۴۸. $xy = 2$

حل $(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2 \Rightarrow r^2\sin 2\theta = 4 \Rightarrow r^2 = \dfrac{4}{\sin 2\theta}$

۴۹. $y^2 = 4x$

حل $y^2 = 4x \Rightarrow r^2\sin^2\theta = 4r\cos\theta \Rightarrow r = \dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$

۵۰. $x^2 - y^2 = 25\sqrt{x^2 + y^2}$

حل $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 25\sqrt{r^2} \Rightarrow r^2\cos 2\theta = 25r \Rightarrow r = \dfrac{25}{\cos 2\theta}$

در مسأله‌های ۵۱ـ۵۴ به کمک اتحادهایی مثلثاتی که $\sin(A \pm B)$ و $\cos(A \pm B)$ را دربرداشته باشند، معادله‌های قطبی را به معادله‌های دکارتی هم‌ارز تبدیل کنید. سپس نمودار این معادله‌ها را بکشید..

$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

$\mathrm{Cos}(A\pm B)=\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B\mp\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B$

۵۱. $r\mathrm{Cos}(\theta-\frac{\pi}{3})=3$

$r\mathrm{Cos}(\theta-\frac{\pi}{3})=r\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{3})+r\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{3})=3\Rightarrow r\mathrm{Cos}\theta+r\sqrt{3}\mathrm{Sin}\theta=6\Rightarrow x+\sqrt{3}y=6$

۵۲. $r\mathrm{Sin}(\theta+\frac{\pi}{4})=4$

حل $r\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{4})+r\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4})=4\Rightarrow y+x=4\sqrt{2}$

۵۳. $r\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-\theta)=\sqrt{2}$

حل $x-y=2$

۵۴. $r\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{6}-\theta)=0$

حل $r\mathrm{Cos}\theta(\frac{\sqrt{3}}{2})+r\mathrm{Sin}\theta(\frac{1}{2})=0\Rightarrow\sqrt{3}x+y=0$

۲.۱۰ ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی
Graphing in polar coordinate

سه آزمون مختصات قطبی برای تقارن و شیب در مبدأ

الف ـ $F(r,\theta)$ نسبت به مبدأ متقارن است اگر با تبدیل r به -r یا تبدیل θ به $\theta+\pi$، معادله تغییر نکند.

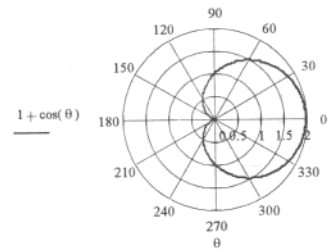
ب ـ نسبت به محور x متقارن است اگر با تبدیل θ به $-\theta$ یا تبدیل جفت (r,θ) به جفت $(-r,\pi-\theta)$، معادله تغییر نکند.

پ ـ نسبت به محور y متقارن است اگر با تبدیل θ به $\pi-\theta$ یا تبدیل جفت (r,θ) به جفت $(-r,-\theta)$ معادله تغییر نکند.

در مسأله‌های ۱ـ۸، در بازهٔ خمها بحث کنید و آنها را بکشید.

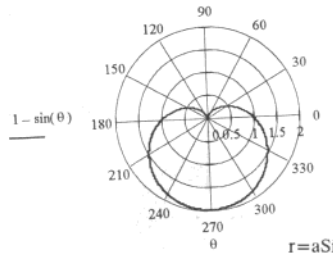
۱. $r=a(1+\mathrm{Cos}\theta)$

حل با تبدیل θ به $-\theta$ خم تغییر نمی‌کند $\mathrm{Cos}\theta=\mathrm{Cos}(-\theta)$ یعنی خم نسبت به محور xها متقارن است. منحنی دلگون نام دارد و بر حسب اینکه a مثبت یا منفی باشد به چپ یا راست دو شکل متفاوت می‌توان بدست آورد. سایر جزئیات را از شکل می‌توان دید.



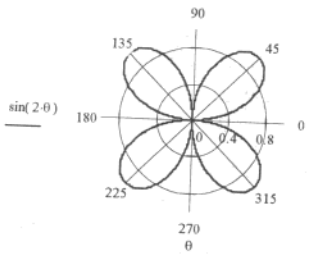
۲. $r=a(1-\mathrm{Sin}\theta)$

حل در اینجا داریم $r=a(1-\mathrm{Sin}\theta)=a(1-\mathrm{Sin}(\pi-\theta))$ یعنی معادله نسبت به محور y متقارن است و منحنی دلگون نام دارد بر حسب اینکه a مثبت و یا منفی باشد دو شکل متفاوت می‌توان بدست آورد سایر جزئیات را در شکل می‌توان دید.



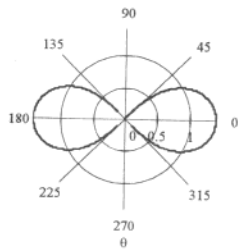
۳. $r=a\mathrm{Sin}2\theta$

حل داریم $-r=a\mathrm{Sin}(-2\theta)=-a\mathrm{Sin}(2\theta)\Rightarrow r=a\mathrm{Sin}2\theta$ یعنی با تبدیل جفت (r,θ) به $(-r,-\theta)$ معادله تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور x و y متقارن است توجه کنید این شکل گل چهارپر نام دارد و جزئیات دیگر را می‌توانید در شکل مشاهده کنید.



۴. $r^2=2a^2\mathrm{Cos}2\theta$

حل با تبدیل (r,θ) به $(-r,-\theta)$ خم تغییر نمی‌کند پس خم نسبت به محور x و y متقارن است و پروانه نام دارد.

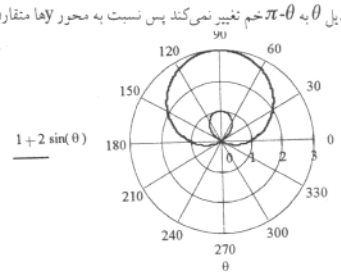


۵. $r=a(2+\mathrm{Sin}\theta)$

حل مانند سؤال ۲ است.

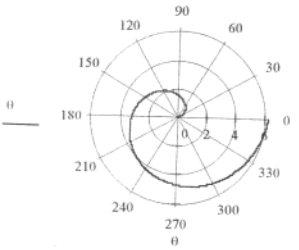
۶. $r=a(1+2\mathrm{Sin}\theta)$

حل باتبدیل θ به $\pi-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور yها متقارن است.



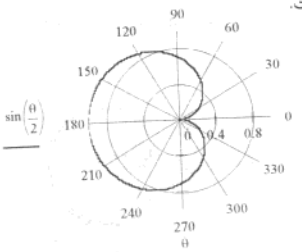
۷. $r=\theta$

حل با تبدیل (r,θ) به $(-r,\theta)$ معادله تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور yها متقارن است.



۸. $r=aSin(\theta/۲)$

حل با تبدیل (r,θ) به $(-r,-\theta)$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور x و yها متقارن است.

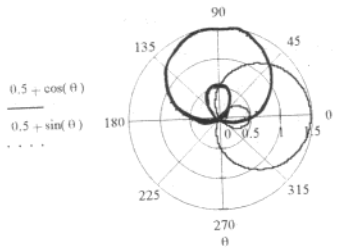


در مسأله‌های ۹ـ۱۲، خمهایی را که معادله‌های آنها داده شده، رسم کنید. این خمها حلزونی نام دارند و هنگام ترسیم آنها مناسبت این نام را در خواهید یافت. معادله‌های حلزونی به صورت $r=a\pm bCos\theta$ یا $r=a\pm bSin\theta$ هستند. حلزونیها چهار شکل اصلی دارند.

۹. حلزونی با طوق داخلی الف ـ $r=\frac{۱}{۲}+Cos\theta$ ب ـ $r=\frac{۱}{۲}+Sin\theta$

حل الف ـ با تبدیل θ به $-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس خم نسبت به محور x متقارن است.

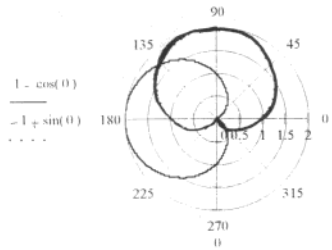
ب ـ با تبدیل θ به $\pi-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور yها متقارن است.



۱۰. دلوار الف ـ $r=۱-Cos\theta$ ب ـ $r=-۱+Sin\theta$

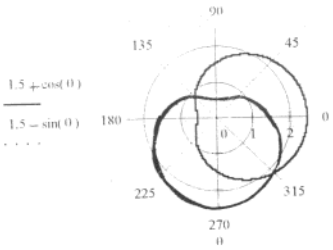
حل الف ـ با تبدیل θ به $-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور xها متقارن است.

ب ـ با تبدیل θ به $\pi-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور yها متقارن است.



۱۱. حلزونی فرو رفته الف ـ $r=\frac{۳}{۲}+Cos\theta$ ب ـ $r=\frac{۳}{۲}-Sin\theta$

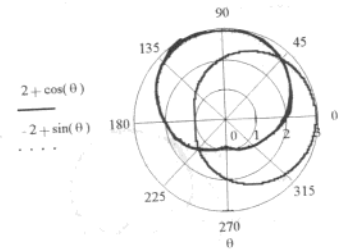
حل الف ـ با تبدیل θ به $-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور xها متقارن است. ب ـ با تبدیل θ به $\pi-\theta$ خم تغییر نمی‌کند پس نسبت به محور yها متقارن است.



۱۲. حلزونی محدب الف ـ $r=۲+Cos\theta$ ب ـ $r=-۲+Sin\theta$

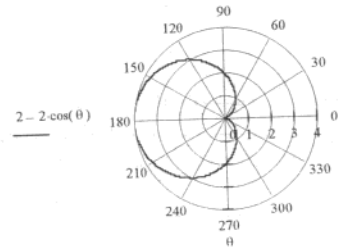
حل الف ـ نسبت به محور xها متقارن است.

ب ـ نسبت به محور yها متقارن است.



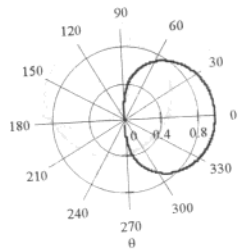
۱۳. ناحیه‌ای را که با نامعادلهٔ $0 \le r \le 2-2\cos\theta$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

حل



۱۴. ناحیه‌ای را که با نامعادلهٔ $0 \le r^2 \le \cos\theta$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

حل



۱۵. نشان دهید که نقطه $(2,3\pi/4)$ بر خم $r=2\sin 2\theta$ واقع است.

حل این نقطه در خم صدق نمی‌کند ولی می‌دانیم.

$$(2,\frac{3\pi}{4})=(-2,\frac{3\pi}{4}-\pi)=(-2,\frac{-\pi}{4})$$

که این نقطه یعنی $(-2,\frac{-\pi}{4})$ در خم صدق می‌کند پس نقطه مورد نظر بر خم واقع است.

۱۶. نشان دهید که نقطه $(1/2,3\pi/2)$ بر خم $r=-\sin(\theta/3)$ واقع است.

حل

$$\begin{cases} r=\frac{1}{2} \\ -\sin(\frac{\theta}{3})=-\sin(\frac{\pi}{2})=-1 \end{cases}$$

$$(\frac{1}{2},\frac{3\pi}{2})=(\frac{-1}{2},\frac{3\pi}{2}-\pi)=(\frac{-1}{2},\frac{\pi}{2})$$

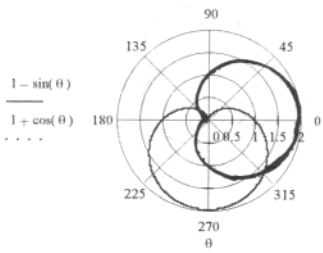
$$\Rightarrow \begin{cases} r=\frac{-1}{2} \\ -\sin(\frac{\theta}{3})=-\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

توجه کنید مختصات $(\frac{1}{2},\frac{3\pi}{2})$ در معادلهٔ صدق نمی‌کند ولی معادل آن یعنی $(\frac{-1}{2},\frac{\pi}{2})$ در معادله صدق می‌کند پس این نقطه نیز برخم واقع است.

نقاط تقاطع هر جفت از خمهای مذکور در مسأله‌های ۱۷ ـ ۲۴ را به دست آورید.

۱۷. $r=a(1+\cos\theta),\ r=a(1-\sin\theta),\ a>0$

حل



$$\begin{cases} r=a(1+\cos\theta) \\ r=a(1-\sin\theta) \end{cases} \Rightarrow 1+\cos\theta=1-\sin\theta \Rightarrow \tan\theta=-1$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

پس نقاط تقاطع عبارتنداز

$(a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}),\frac{3\pi}{4})$ و $(a(1+\frac{\sqrt{2}}{2}),\frac{7\pi}{4})$ و مبدأ

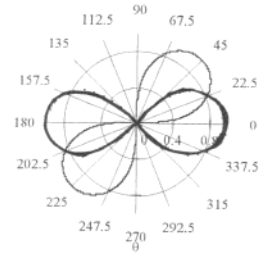
۱۸. $r^2=\sin 2\theta,\ r^2=\cos 2\theta,\ a>0$

حل $r^2=\sin 2\theta=\cos 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}$

پس نقاط تقاطع عبارتند از $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{\pi}{4})$ و $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{5\pi}{8})$ و مبدأ

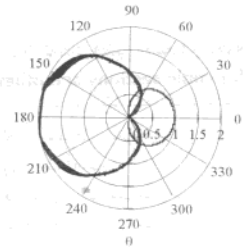
$$\text{if},\ \theta=\frac{\pi}{8} \Rightarrow r^2=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\text{if},\ \theta=\frac{5\pi}{8} \Rightarrow r^2=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$



۱۹. $r^2=\cos\theta$ و $r=1-\cos\theta$

حل



$r=1-\cos\theta \Rightarrow r^2=(1-\cos\theta)^2,\ r^2=\cos\theta \Rightarrow (1-\cos\theta)^2=\cos\theta \Rightarrow$
$\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0 \Rightarrow \cos\theta=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r=1-\cos\theta=$

$$1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

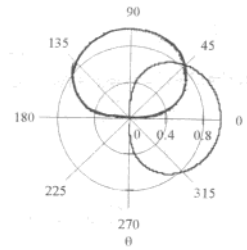
پس نقاط تقاطع عبارتند از

$$\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\cos^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},2\pi-\cos^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

۲۰. $r^2=\sin\theta,\ r^2=\cos\theta$

حل



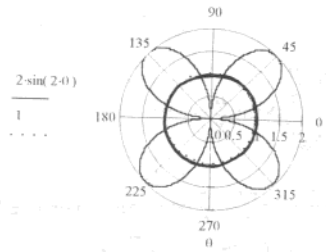
$r^2=\sin\theta=\cos\theta \Rightarrow \tan\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$

if $\theta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow r^2=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow =\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

و نقاط تقاطع عبارتند از $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}},\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}},\frac{3\pi}{4}\right)$ و مبدأ

۲۱. $r=1,\ r=2\sin 2\theta$

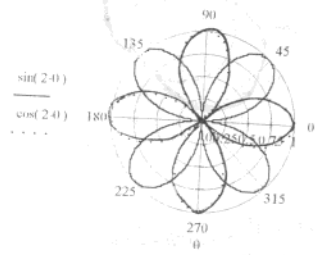
حل



تقاطع دایره $r=1$ و گل چهار پر $r=2\sin 2\theta$، ۸ نقطه $\left(1,\frac{\pm\pi}{12}\right)$ و $\left(1,\frac{\pm 5\pi}{12}\right)$ و $\left(1,\frac{\pm 13\pi}{12}\right)$ و $\left(1,\frac{\pm 17\pi}{12}\right)$ خواهد بود.

۲۲. $r=a\cos 2\theta,\ r=a\sin 2\theta,\ a>0$

حل



تقاطع دو گل چهار پر $r=a\sin 2\theta$ و $r=a\cos 2\theta$ مبدأ و ۸ نقطه زیر است.

$r=\sin 2\theta=\cos 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta=1$

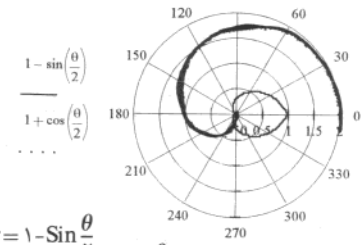
$\Rightarrow 2\theta=\frac{\pm\pi}{4}$ و $\pm\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pm 5\pi}{4},\ \frac{\pm 7\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pm\pi}{8},\ \frac{\pm 3\pi}{8},\ \frac{\pm 5\pi}{8},\ \frac{\pm 7\pi}{8}$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pm\pi}{8}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pm 3\pi}{8}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{5\pi}{8}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pm 7\pi}{8}\right)$$

۲۳. $r=1+\cos\frac{\theta}{2},\ r=1-\sin\frac{\theta}{2}$

حل



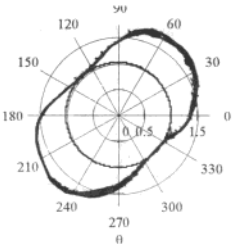
$$\begin{cases} r=1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2} \\ r=1+\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2}=-1\Rightarrow$$

$$\frac{\theta}{2}=\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2}\Rightarrow r=1-\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{2})\Rightarrow r=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و بنابراین نقاط $(0,0)$، $(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{2})$ و $(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\pi}{2})$ و پنج نقطه تلاقی دو خم هستند.

۲۴. $r^2=2a^2+\mathrm{Sin}2\theta,\ r=a,\ a>0$

حل



$$\begin{cases} r=a\Rightarrow r^2=a^2 \\ r^2=2a^2\mathrm{Sin}2\theta \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Sin}2\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$2\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12}$$

$$\begin{cases} \text{if }, \theta=\frac{\pi}{12}\Rightarrow r=\pm a \\ \text{if }, \theta=\frac{5\pi}{12}\Rightarrow r=\pm a \end{cases}$$

و در چهار نقطه $(\pm a,\frac{\pi}{12})$ و $(\pm a,\frac{5\pi}{12})$ تقاطع داریم.

۲۵. نشان دهید که معادله‌های $r=1+\mathrm{Cos}\theta$ و $r=-1+\mathrm{Cos}\theta$ خم واحدی را نشان می‌دهند.

حل کافی است بررسی کنیم اگر (r,θ) در یکی از دو معادله صدق می‌کند $(-r,\pi+\theta)$ در معادله دیگر صدق می‌کند و بر عکس

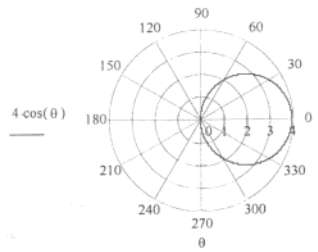
۳.۱۰ معادله‌های قطبی مقطعهای مخروطی و خمهای دیگر
Polar Equations for conic sections and other curves

معادله قطبی مقطع‌های مخروطی	$r=\frac{ke}{1-e\mathrm{Cos}\theta}$
یک کانون در مبدأ است	
هادی، قائم و در سمت چپ مبدأ است	
k برابر است با فاصله مبدأ تا هادی	
e برابر است با خروج از مرکز	

در مسأله‌های ۱ـ۱۸، خمها را رسم کنید. برای هر خم، یک معادلهٔ دکارتی بیابید.

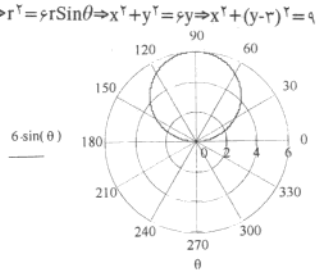
۱. $r=4\mathrm{Cos}\theta$

حل $r=4\mathrm{Cos}\theta\Rightarrow r^2=4r\mathrm{Cos}\theta\Rightarrow x^2+y^2=4x\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4$



۲. $r=6\mathrm{Sin}\theta$

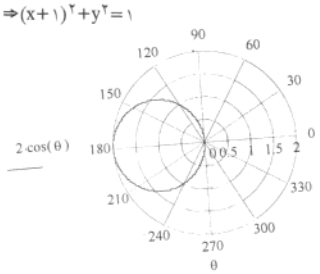
حل $r=6\mathrm{Sin}\theta\Rightarrow r^2=6r\mathrm{Sin}\theta\Rightarrow x^2+y^2=6y\Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$



۳. $r=-2\cos\theta$

حل: $r=-2\cos\theta \Rightarrow r^2=-2r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=-2x$

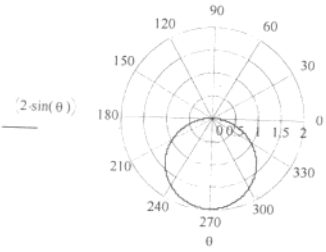
$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=1$



۴. $r=-2\sin\theta$

حل: $r=-2\sin\theta \Rightarrow r^2=-2r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=-2y \Rightarrow x^2+y^2+2y=0$

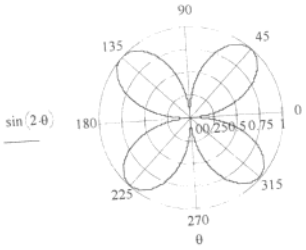
$\Rightarrow x^2+(y+1)^2=1$



۵. $r=\sin 2\theta$

حل: $r=\sin 2\theta \Rightarrow r=2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r^3=2(r\sin\theta)(r\cos\theta)$

$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}=2xy$



۶. $r=\sin 3\theta$

حل: $r=\sin 3\theta \Rightarrow r=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta\cos\theta+(\cos^2\theta-1)\sin\theta=2\sin\theta\cos^2\theta$

$+(2\cos^2\theta-1)\sin\theta$

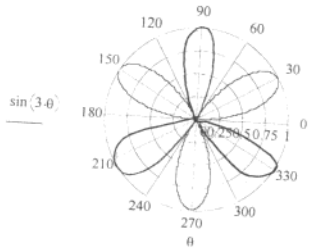
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$+\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}-1\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\frac{2yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2$$

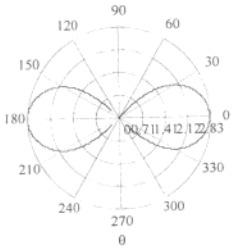
$=2yx^2+yx^2-y^3 \Rightarrow (x^2+y^2)^2=3yx^2-y^3$



۷. $r^2=8\cos 2\theta$

حل: $r^2=8\cos 2\theta \Rightarrow r^2=8(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

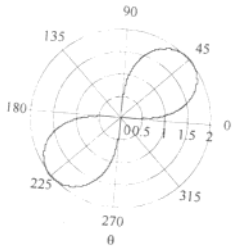
$\Rightarrow r^4=8(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta) \Rightarrow (x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$



۸. $r^2=4\sin 2\theta$

حل: $r^2=4\sin 2\theta=8\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r^4=8r\sin\theta r\cos\theta$

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2=8xy$

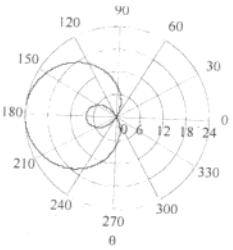


۹. $r=8(1-2\cos\theta)$

حل: $r=8(1-2\cos\theta)\Rightarrow r^2=8(r-2r\cos\theta)\Rightarrow x^2+y^2$

$=8\left(\sqrt{x^2+y^2}-2x\right)\Rightarrow(x^2+y^2+16x)=8\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow\left(x^2+y^2+16x\right)^2=64\left(x^2+y^2\right)$

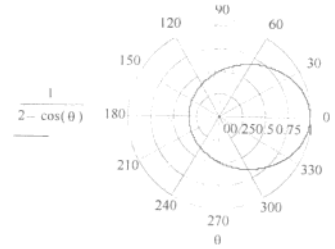


۱۰. $r=1/(2-\cos\theta)$

حل: $r=\frac{1}{2-\cos\theta}\Rightarrow 2-\cos\theta=\frac{1}{r}\Rightarrow 2r-r\cos\theta=1$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}-x=1\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=x+1$

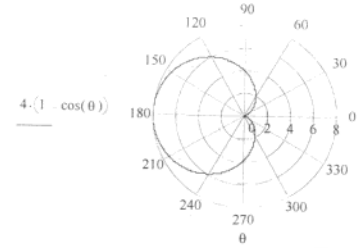
$\Rightarrow 4(x^2+y^2)=(x+1)^2\Rightarrow 3x^2+4y^2-2x=1$



۱۱. $r=4(1-\cos\theta)$

حل: $r^2=4(r-r\cos\theta)\Rightarrow x^2+y^2=4\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$

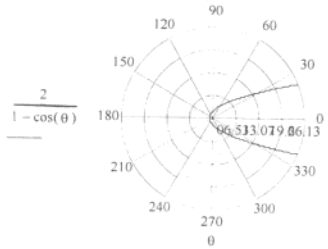
$\Rightarrow(x^2+y^2+4x)^2=16(x^2+y^2)$



۱۲. $r(2-2\cos\theta)=4$

حل: $2r-2r\cos\theta=4\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}-x=2$

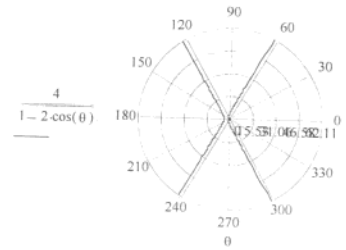
$\Rightarrow(x^2+y^2)=(2+x)^2\Rightarrow y^2=4(x+1)$



۱۳. $r(3-6\cos\theta)=12$

حل: $r-2r\cos\theta=4\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}-2x=4$

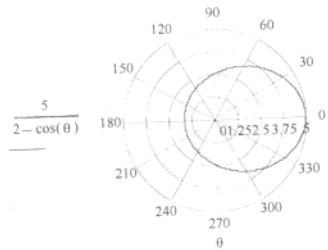
$\Rightarrow(x^2+y^2)=(4+2x)^2\Rightarrow 3x^2-y^2+16x+16=0$



۱۴. $r(10-5\cos\theta)=25$

حل: $r(2-\cos\theta)=5\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=5+x$

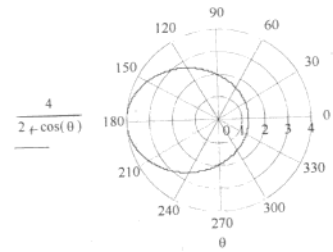
$\Rightarrow 4(x^2+y^2)=(5+x)^2\Rightarrow 3x^2+4y^2-10x=25$



۱۵. $r(2+\cos\theta)=4$

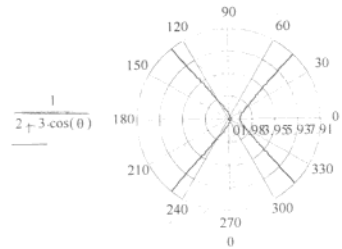
حل: $(2r+r\cos\theta)=4\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}+x=4\Rightarrow 4(x^2+y^2)$

$=(4-x)^2\Rightarrow 3x^2+4y^2+8x=16$



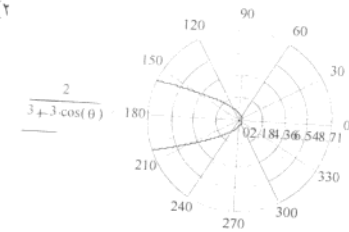
۱۶. $r(2+3\cos\theta)=1$

حل $2r+3r\cos\theta=1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=1-3x \Rightarrow 4(x^2+y^2)=(1-3x)^2 \Rightarrow 5x^2-2y^2-6x+1=0$



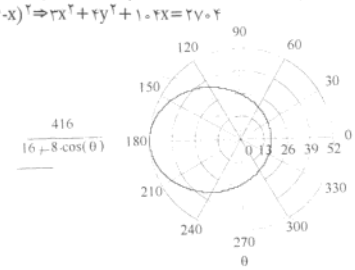
۱۷. $r(3+3\cos\theta)=2$

حل $3r=2-3r\cos\theta \Rightarrow 3\sqrt{x^2+y^2}=2-3x \Rightarrow 9(x^2+y^2)=(2$



۱۸. $r(16+8\cos\theta)=416$

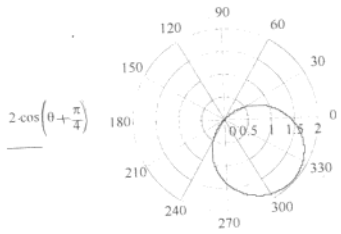
حل $r(2+\cos\theta)=52 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=52-x \Rightarrow 4(x^2+y^2)=(52-x)^2 \Rightarrow 3x^2+4y^2+104x=2704$



در مسأله‌های ۱۹ ـ ۲۳، نمودار معادله‌ها را رسم کنید.

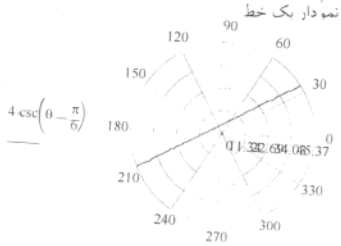
۱۹. $r=2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$

حل دایره به مرکز $(1,\frac{-\pi}{4})$ و شعاع ۱



۲۰. $r=4\csc(\theta-\frac{\pi}{6})$

حل نمودار یک خط



چراکه $r=4\csc(\theta-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow r=\frac{4}{\sin(\theta-\frac{\pi}{6})} \Rightarrow r\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=4$

$\Rightarrow r\sin\theta\cos(\frac{\pi}{6})-r\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=4$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta-\frac{1}{2}r\cos\theta=4 \Rightarrow \sqrt{3}y-x=8$

۲۱. $r=5\sec(\frac{\pi}{3}-\theta)$

معادله خط $x+\sqrt{3}y=10$ است چراکه

حل $r=\frac{5}{\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)} \Rightarrow 5=r\cos(\frac{\pi}{3}-\theta) \Rightarrow r\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}$

$+r\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}=5 \Rightarrow \frac{r\cos\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}r\sin\theta}{2}$

$=5 \Rightarrow x+\sqrt{3}y=10$

۲۲. $r=3\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$

حل معادله دایره به مرکز $(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3})$ و شعاع $\frac{3}{2}$

۲۳. $r=a+a\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$

حل معادله دلواری که محور تقارن آن (محور xها) به اندازه ۳۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده است.

۲۴. شکل ناحیه‌ای را که با نامعادلهٔ $0\le r\le 2\cos\theta$ تعریف می‌شود بکشید.

حل ناحیه داخل ورودی دایره به مرکز (۱،۰) و شعاع ۱

هر یک از نمودارهای مسأله‌های ۲۵ ـ ۳۲، نمودار دقیقاً یکی از معادله‌های (الف) ـ (ر) است که در فهرست زیر می‌بینید. معادلهٔ هر نمودار را پیدا کنید.

الف ـ $r=\cos 2\theta$ ب ـ $r\cos\theta=1$

پ ـ $r=\frac{6}{1-2\cos\theta}$ ت ـ $r=\sin 2\theta$

ث ـ $r=\theta$ ج ـ $r^2=\cos 2\theta$

چ ـ $r=1+\cos\theta$ ح ـ $r=1-\sin\theta$

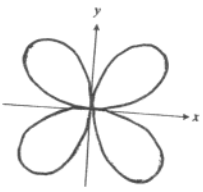
خ ـ $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$ د ـ $r^2=\sin 2\theta$

ذ ـ $r=-\sin\theta$ ر ـ $r=2\cos\theta+1$

۲۵. گل چهار پر

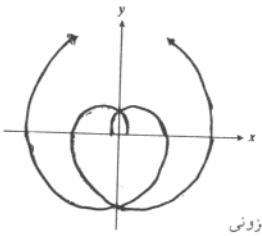
حل گل چهار پر $(r=\sin 2\theta)$

۲۵. گل چهار پر



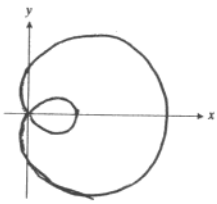
۲۶. مارپیچ

حل مارپیچ $(r=\theta)$



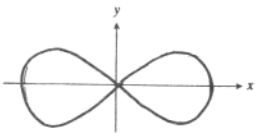
۲۷. حلزونی

حل حلزونی $(r=1+2\cos\theta)$



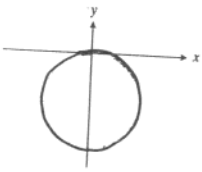
۲۸. پروانه

حل پروانه $(r^2=\cos 2\theta)$

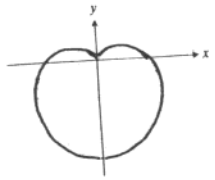


۲۹. دایره

حل دایره $(r=-\sin\theta)$



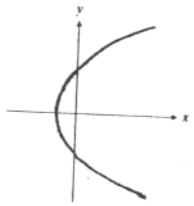
۳۰. دلوار



حل دلوار $(r=1-\sin\theta)$

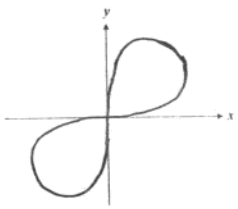
۳۱. سهمی

حل سهمی $(r=\frac{2}{1-\cos\theta})$



۳۲. پروانه

حل پروانه $(r^2=\sin 2\theta)$

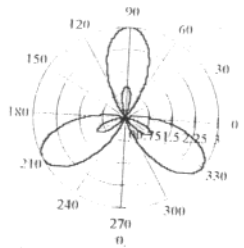


۳۳. مارپیچ ارشمیدس. نمودار معادله‌ای به شکل $r=a\theta$ که a ثابتی نامنفی است، یک مارپیچ ارشمیدسی نامیده می‌شود. نشان دهید که چنین مارپیچی، هر پرتوی را که از مبدأ بگذرد به بخشهای مساوی تقسیم می‌کند. به عبارت دیگر نشان دهید که فاصله بین هر دو دور متوالی مارپیچ ثابت است.

حل گیریم $\theta=\theta_0$ یک پرتو ثابت باشد. می‌دانیم دو نقطه $(a(\theta_0+2n\pi),\theta_0+2n\pi)$ و $(a(\theta_0+2\pi+2n\pi),\theta_0+2\pi+2n\pi)$ در این خم یعنی $r=a\theta$ صدق می‌کند. حال فاصله دو دور متوالی مارپیچ برابر است با $a(\theta_0+2n\pi)-a(\theta_0+2\pi+2n\pi)=-2a\pi$ که مقداری ثابت است.

۳۴. گلی در میان گل. نمودار معادله $r=1-2\sin 3\theta$ را رسم کنید.

حل



۳۵. الف ـ معادلاتی دکارتی برای خمهای $r=2\sin\theta$ و $r=\csc\theta$ بیابید.

ب ـ خمهای قسمت (الف) را در یک نمودار رسم کنید و نقاط تقاطع را هم در مختصات دکارتی و هم در مختصات قطبی مشخص کنید.

حل $r=2\sin\theta\Rightarrow r^2=2r\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2=2y\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$

$r=\csc\theta\Rightarrow r=\frac{1}{\sin\theta}\Rightarrow r\sin\theta=1\Rightarrow y=1$

۳۶. مسأله ۳۷ را برای خمهای $r=2\cos\theta$ و $r=\sec\theta$ تکرار کنید.

حل $r=2\cos\theta\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=2x\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$

$r=\sec\theta\Rightarrow r\cos\theta=1\Rightarrow x=1$

۳۷. کانون یک سهمی در مبدأ، و هادیش خط $r\cos\theta=-2$ است. برای این سهمی معادله‌ای قطبی بیابید.

حل $r=\frac{ek}{1-e\cos\theta},\ \begin{cases}k=4\\e=1\end{cases}\Rightarrow r=\frac{4}{1-\cos\theta}$

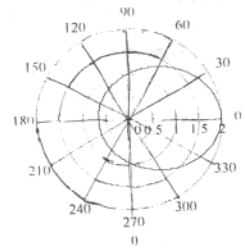
۳۸. بیضی $r=2/(2-\cos\theta)$ را رسم کنید و مرکزش را مشخص کنید.

حل $r=\frac{2}{2-\cos\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos\theta},\ \begin{cases}ke=1\\e=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow k=2$

$ke=a(1-e^2)\Rightarrow 1=a(1-\frac{1}{4})\Rightarrow a=\frac{4}{3}$

$e=\frac{c}{a}\Rightarrow c=ea=\frac{1}{2}(\frac{4}{3})=\frac{2}{3}$

چون کانون در مبدأ است و $c=\frac{2}{3}$ پس مرکز در $(\frac{2}{3},0)$ می‌باشد.



۳۹. یک کانون هذلولی با خروج از مرکز ۲ [illegible] و [illegible] خط $r\cos\theta=9$ است. مختصات قطبی کانون دوم را بیابید و نیز معادله‌ای قطبی برای این هذلولی پیدا کنید.

حل $r\cos\theta=9\Rightarrow x=9\Rightarrow k=-9,\ e=\frac{5}{4}$

$$r=\frac{ke}{1-e\cos\theta}=\frac{-9(\frac{5}{4})}{1-\frac{5}{4}\cos\theta}=\frac{-45}{4-5\cos\theta}$$

if $\theta=0 \Rightarrow r=\frac{-45}{-1}=45 \Rightarrow V(45,0)$

if $\theta=\pi \Rightarrow r=\frac{-45}{9}=-5 \Rightarrow c(\pi,-5)$

پس کانون دیگر در $(50,0)$ قرار دارد.

۴۰. معادله‌ای قطبی برای سهمیی که کانونش در مبدأ و هادیش خط $r\cos(\theta-\pi/2)=2$ است. پیدا کنید.

حل $r\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=2 \Rightarrow r\sin\theta=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow k=2$

$e=1 \Rightarrow r=\frac{2}{1+\sin\theta}$

۴.۱۰ انتگرال در مختصات قطبی

Integral in polar coordintes

Area Between the origin ard $r=f(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Area of the Region $r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r_2^2 d\theta-\int_\alpha^\beta r_1^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2-r_1^2)d\theta$$

مطلوب است مساحت نواحیی که در مسأله‌های ۱ ـ ۲۰ توصیف می‌شوند. حرف a هر جا دیده می‌شود، نشاندهندهٔ یک ثابت مثبت است

۱. درون دایرهٔ $r=\cos\theta$ بین پرتوهای $\theta=0$ و $\theta=\pi/4$ در ربع اول.

حل $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)d\theta$

$$=\left[\frac{\theta}{4}+\frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{16}$$

۲. ناحیه مشترک بین دایرهٔ $r=a$ و دلوار $r=a(1-\cos\theta)$

حل $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right) d\theta=2$

در مثال (۳) کتاب، ناحیه که درون دایره $r=a$ و بیرون دلوار $r=a(1-\cos\theta)$ باشد بدست آمده است $A_1=a^2(2-\frac{\pi}{4})$ حال کافی است مساحت دایره را بدست آوریم و مقدار فوق را از آن کم کنیم تا مساحت مورد نظر بدست آید.

$A_c=\pi R^2=\pi a^2 \Rightarrow A=A_c-A_1=\pi a^2-a^2(2-\frac{\pi}{4})=\frac{5\pi}{4}a^2-2a^2$

۳. درون حلزونی $r=4+2\cos\theta$

حل $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4+2\cos\theta)^2 d\theta$

$$=\int_0^{2\pi} (8+8\cos\theta+2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} (8+8\cos\theta+1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} (9+8\cos\theta+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=9\theta+8\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi}=18\pi$$

۴. درون دلوار $r=a(1+\cos\theta)$

حل $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}a^2$$

۵. درون دایرهٔ $r=2a\sin\theta$

حل $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 4a^2\sin^2\theta d\theta$

$$=2a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta=2a^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\pi}=\pi a^2$$

۶. درون پروانهٔ $r^2=2a^2\cos 2\theta$

حل بنابر تقارن می‌توان مساحت یک پر را بدست آورد و آنرا دو برابر کرد

$r=0 \Rightarrow 2a^2\cos 2\theta=0 \Rightarrow \cos 2\theta=0 \Rightarrow 2\theta=\pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pm\pi}{4}$

$$A=2(\frac{1}{2})\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta d\theta=2a^2(\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$=a^2(1+1)=2a^2$

۷. قسمتی از درون پروانه $r^2=2a^2\cos 2\theta$ که در دایرهٔ $r=a$ قرار ندارد.

حل باز هم بنا بر تقارن مساحت یک طرف شکل مورد نظر را بدست می‌آوریم و آنرا دو برابر می‌کنیم.

$$\begin{cases} r^2=2a^2\cos 2\theta \\ r=a \Rightarrow r^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2=2a^2\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2\theta=\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pm\pi}{6}$

۱۰. درون دایرهٔ $r=3a\cos\theta$ ولی بیرون دلوار $r=a(1+\cos\theta)$

حل

$$\begin{cases} r=3a\cos\theta \\ r=a(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow 3\cos\theta=1+\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pm\pi}{3}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[(3a\cos\theta)^2-(a(1+\cos\theta))^2\right] d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (9\cos^2\theta-1-2\cos\theta-\cos^2\theta)d\theta$$

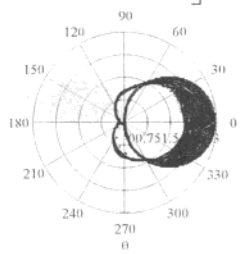
$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8\cos^2\theta-1-2\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8(\frac{1+\cos 2\theta}{2})-1-2\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3+4\cos 2\theta-2\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[3\theta+2\sin 2\theta-2\sin\theta\right]_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\pi+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\pi+\sqrt{3}-\sqrt{3}\right]=\pi a^2$$



۱۱. درون دایرهٔ $r=-2\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $r=1$

حل

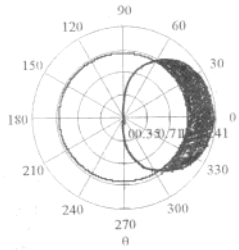
$$\begin{cases} r=-2\cos\theta \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=\frac{-1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left[(-2\cos\theta)^2-1\right] d\theta$$

$$A=2(\frac{1}{2})\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2a^2\cos 2\theta-a^2)d\theta$$

$$=a^2\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\theta-1)d\theta=a^2(\sin 2\theta-\theta)\Big]_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{a^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$$



۸. درون خم $r=a(2+\cos\theta)$

حل

$$A=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} (2+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} (4+4\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (4+4\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{9}{2}\theta+4\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{2\pi}=\frac{9\pi}{2}a^2$$

۹. ناحیهٔ مشترک بین دایره‌های $r=2a\cos\theta$ و $r=2a\sin\theta$

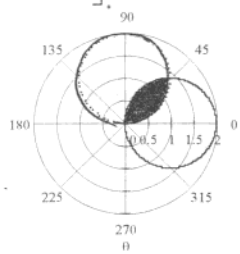
حل

$$\begin{cases} r=2a\sin\theta \\ r=2a\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \tan\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$A=2(\frac{1}{2})\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a\cos\theta)^2 d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

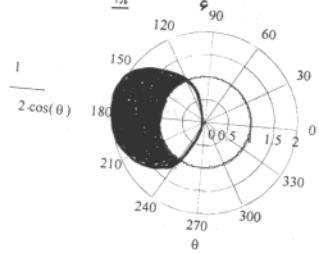
$$=2a^2(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})=(\frac{\pi}{2}-1)a^2$$

لطفاً شکل را نگاه کنید.



$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(4\cos^2\theta-1)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(2+2\cos 2\theta-1)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin 2\theta+\theta\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$$



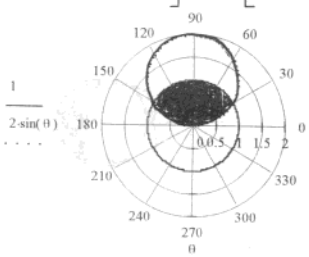
۱۲. ناحیهٔ مشترک بین دایره‌های $r=a$ و $r=2a\sin\theta$

حل
$$\begin{cases} r=a \\ r=2a\sin\theta \end{cases}\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(4a^2\sin^2-a^2)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2-2\cos 2\theta-1)d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta-\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]=a^2\left[\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$



۱۳. ناحیهٔ مشترک بین دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ و $r=a(1-\cos\theta)$

حل
$$\begin{cases} r=a(1-\cos\theta) \\ r=a(1+\cos\theta) \end{cases}\Rightarrow 1-\cos\theta=1+\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pm\pi}{2}$$

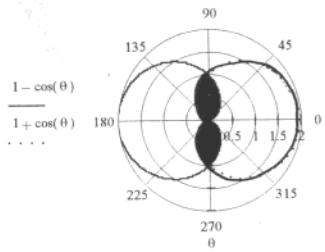
$$\Rightarrow A=2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=a^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+2\sin\theta\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2-\frac{3}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)-2(-1)\right]=\left[\frac{3\pi+8}{2}\right]a^2$$

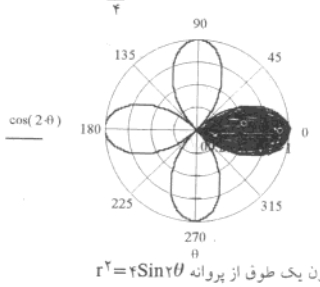


۱۴. درون یک پر از گل $r=\cos 2\theta$

حل
$$r\cos 2\theta,\ r=0\Rightarrow\cos 2\theta=0\Rightarrow 2\theta=\frac{\pm\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pm\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

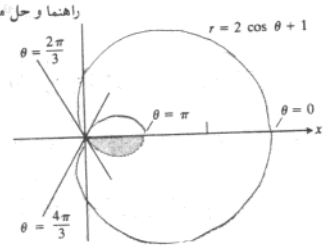
$$\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)\left[\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$$



۱۵. درون یک طوق از پروانه $r^2=2\sin 2\theta$

حل
$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}4\sin 2\theta d\theta=2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta$$

$$=-\cos 2\theta\Big]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2$$



$$a)\ A_L=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}(2\cos\theta+1)d\theta=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$b)\ A'=A_I-A_S=2\pi+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\pi+3\sqrt{3}$$

۱۹. ناحیهٔ محدود به پرتوهای $\theta=0$ و $\theta=\pi$ و خم $r=\sqrt{\theta}e^{\theta}$، $0\le\theta\le\pi$

حل

$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\sqrt{\theta}\,e^{\theta}\right)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int\theta e^{2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2\theta e^{2\theta}-e^{2\theta}}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi e^{2\pi}-e^{2\pi}+1}{8}$$

۲۰. درون دایرهٔ $r=6$ و بالای خط $r\sin\theta=3$

حل

$$\begin{cases} r\sin\theta=3 \\ r=6\end{cases}\Rightarrow r=\frac{3}{\sin\theta}\Rightarrow 2\sin\theta=1\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow A=\frac{2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(6^2-\left(\frac{3}{\sin\theta}\right)^2\right)d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(36-9\csc^2\theta)d\theta=36\theta+9\cot\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=12\pi-9\sqrt{3}$$

۲۱. طبق معمول، وقتی با فرمول جدیدی روبرو می‌شویم خوب است آن را در مورد اشیاء آشنا بیازماییم تا مطمئن شویم نتایج دلخواه ما را به دست می‌دهد. فرمول $ds^2=r^2d\theta^2+dr^2$ از معادلهٔ (۵) را برای محاسبهٔ محیط دایره‌های زیر به کار برید.

الف ـ $r=a$، ب ـ $r=a\cos\theta$، پ ـ $r=a\sin\theta$

حل

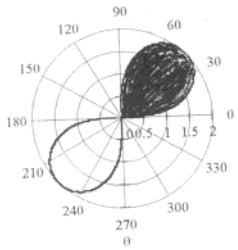
$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

$$a)\ r=a\Rightarrow r'=0\Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+0}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi a$$

$$b)\ r'=-a\sin\theta\Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi a$$

$$c)\ r'=a\cos\theta\Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\,d\theta=2\pi a$$



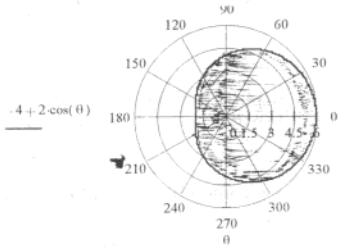
۱۶. درون خم $r=-4+2\cos\theta$

حل

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-4+2\cos\theta)^2d\theta=2\int_0^{2\pi}(4-4\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left(4-4\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=2\left[\frac{9}{2}\theta-4\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}=9(2\pi)=18$$

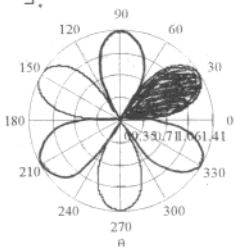


۱۷. درون گل شش پر $r^2=2a^2\sin3\theta$

حل

$$A=6\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{3}}2a^2\sin3\theta d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}3\sin3\theta d\theta$$

$$=-2a^2\cos3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-2(-1-1)a^2=4a^2$$



۱۸. الف ـ درون طوق بزرگ حلزونی مثال ۲

ب ـ درون طوق بزرگ این حلزونی ولی بیرون طوق کوچک آن

حل

۲۲. طول دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ را بیابید.

(راهنمایی: $\int\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=\int\sqrt{2}\,\left|\cos(\theta/2)\right|\,d\theta$)

حل

$$r'=-a\sin\theta\Rightarrow L=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=2a\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\,d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8a$$

۲۳. طول خم $r=a\sin^2(\theta/2)$ از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ را بیابید.

حل

$$r=a\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow r'=2\left(\frac{1}{2}\right)a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)+a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=a\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\,d\theta$$

$$=a\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=-2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=2a$$

۲۴. طول مارپیچ سهموی $r=a\theta^2$ بین $\theta=0$ و $\theta=\pi$ را پیدا کنید.

حل

$$r'=2a\theta\Rightarrow L=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\theta^2+4a^2\theta^2}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{\pi}\theta\sqrt{\theta^2+4}\,d\theta=\frac{a}{3}\left(\theta^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\pi}$$

۲۵. طول خم $r=a\sin^3(\theta/3)$ بین $\theta=0$ و $\theta=3\pi$ را بیابید.

حل

$$r=a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)\Rightarrow r'=3\left(\frac{1}{3}\right)a\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$\Rightarrow L=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right)=a^2\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right]}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)}\,d\theta=a\int_0^{3\pi}\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left[1-\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]\,d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\left[\theta-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{3\pi}=\frac{3a\pi}{2}$$

۲۶. معادله‌های $r=e^{2t}$، $\theta=3t$، $0\le t\le\pi/6$ خمی را در صفحه مختصات قطبی تعریف می‌کنند.

الف ـ مساحت ناحیهٔ محدود به این خم در ربع اول را حساب کنید.

ب ـ طول خم را حساب کنید.

حل

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}3e^{4t}dt=\frac{3}{8}e^{4t}\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$r'(t)=2e^{2t}dt=6e^{2t}dt\Rightarrow ds^2=r^2d\theta^2+dr^2=(e^{2t})^2(3dt)^2$$

$$+\left(6e^{2t}dt\right)^2=\left[9e^{4t}+36e^{4t}\right]\,(dt)^2$$

$$\Rightarrow L=\int_0^{\frac{\pi}{6}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{9e^{4t}+36e^{4t}}\,dt=\sqrt{40}\int_0^{\frac{\pi}{6}}e^{2t}dt$$

$$=\sqrt{10}\,e^{2t}\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

۲۷. مساحت رویه‌ای را که از دوران پروانه $r^2=2a^2\cos2\theta$ حول محور x تولید می‌شود، پیدا کنید.

حل

$$S=2\pi\int_a^b y\,ds,\ \ y=r\sin\theta, r^2=2a^2\cos2\theta$$

$$\Rightarrow 2rdr=-4a^2\sin2\theta d\theta\Rightarrow dr=\frac{-2a^2\sin2\theta}{r}\,d\theta$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\sqrt{2a^2\cos2\theta+\frac{4a^2\sin^2 2\theta}{r^2}}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\sqrt{r^2\,2a^2\cos2\theta+4a^4\sin^2 2\theta}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\sqrt{4a^4\cos^2 2\theta+4a^4\sin^2 2\theta}\,d\theta$$

$$=4a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=-4\pi a^2\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\pi a^2(2-\sqrt{2})$$

۲۸. مساحت رویه‌ای را که از دوران دایرهٔ $r=2a\cos\theta$ حول محور y تولید می‌شود، بیابید.

حل

$$S=\int_a^b 2\pi x\,ds=2\pi\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\sqrt{4a^2\cos^2\theta+4a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= ۲\pi \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۲a\mathrm{Cos}\theta)(\mathrm{Cos}\theta)(۲a)d\theta$$

$$= ۸a^۲\pi \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \mathrm{Cos}^۲\theta d\theta = ۴a^۲\pi \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\mathrm{Cos}\,۲\theta)d\theta$$

$$= ۴a^۲\pi \left[\theta + \frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,۲\theta\right]_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = ۴a^۲\pi^۲$$

۲۹. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قسمتی از دلوار $r=۱+\mathrm{Cos}\theta$ که در ربع اول است حول محور x تولید می‌شود. (راهنمایی: برای ساده کردن انتگرال، از اتحادهای $۱+\mathrm{Cos}\theta=۲\mathrm{Cos}^۲(\theta/۲)$ و $\mathrm{Sin}\theta=۲\mathrm{Sin}(\theta/۲)\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{۲})$ استفاده کنید.)

حل

$$S=۲\pi \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} r\mathrm{Sin}\theta\sqrt{(۱+\mathrm{Cos}\theta)^۲+(\mathrm{Sin}\theta)^۲}\,d\theta$$

$$= ۲\pi \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{Sin}\theta\sqrt{۲+۲\mathrm{Cos}\theta}\,d\theta$$

$$= ۴\pi \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{۲})d\theta$$

$$= ۴\pi \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۲\mathrm{Cos}^۲\frac{\theta}{۲}\left[۲\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{۲})\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{۲})\right]\mathrm{Cos}(\frac{\theta}{۲})d\theta$$

$$= ۱۶\pi \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \mathrm{Cos}^۴(\frac{\theta}{۲})\mathrm{Sin}(\frac{\theta}{۲})d\theta$$

$$= -۱۶\pi \left[\frac{۲}{۵}\mathrm{Cos}^۵(\frac{\theta}{۲})\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۴\pi(۸-\sqrt{۲})}{۵}$$

۳۰. مقدار متوسط. مقدار متوسط r روی خم $r=f(\theta)$، $\alpha\le\theta\le\beta$ نسبت به θ عبارت است از مقدار انتگرال زیر

$$r_{av}=\frac{۱}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)d\theta$$

مطلوب است مقدار متوسط r نسبت به θ روی

الف ـ دلوار $r=a(۱-\mathrm{Cos}\theta)$

ب ـ دایرهٔ $r=a$

پ ـ دایرهٔ $r=a\mathrm{Cos}\theta$

حل

$$r_{av}=\frac{۱}{۲\pi-۰}\int_{۰}^{۲\pi} a(۱-\mathrm{Cos}\theta)d\theta=a$$

$$r_{av}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} ad\theta=a,\ r_{av}=\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}-(\frac{-\pi}{۲})}\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} a\mathrm{Cos}\theta d\theta=\frac{۲a}{\pi}$$

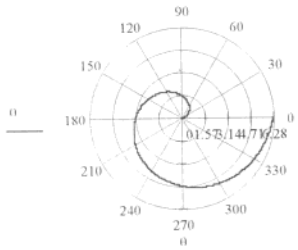
مسأله‌های گوناگون

MISCELLANEOUS PROBLEMS

در مسأله‌های ۱ـ۱۴، خمها را رسم کنید (در این مسأله‌ها a یک ثابت مثبت است). [نوع] خمها را، در مواردی که می‌توانید، مشخص کنید.

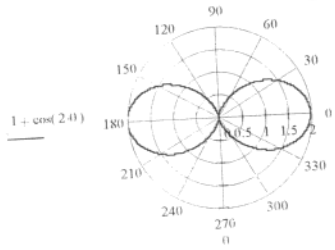
۱. $r=a\theta$

حل مارپیچ ارشمیدس



۲. $r=a(۱+\mathrm{Cos}\,۲\theta)$

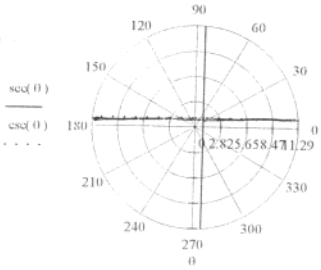
حل



۳. الف ـ $r=a\sec\theta$ ب ـ $r=a\csc\theta$ پ ـ $r=a\sec\theta+a\csc\theta$

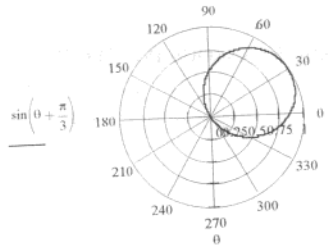
حل الف ـ خط قائم $x=a$ ب ـ خط افقی $y=a$

پ ـ خم $y=\frac{ax}{x-a}$، هذلولوی با مجانبهای $x=a$ و $y=a$



۴. $r=a\mathrm{Sin}(\theta+\frac{\pi}{۳})$

حل دایره

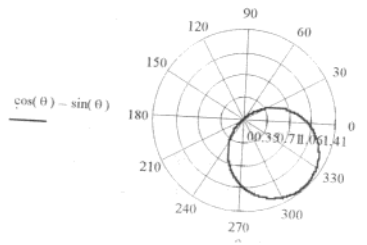


۵. $r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)=7$

حل دایره به مرکز $(-1,-1)$ و شعاع $r=3$

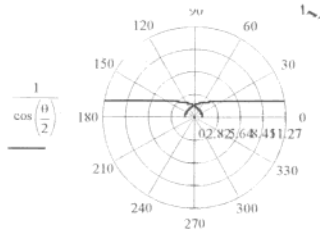
۶. $r=a\cos\theta-a\sin\theta$

حل دایره به مرکز $\left(\frac{a}{2},\frac{-a}{2}\right)$ $\frac{a}{\sqrt{2}}$



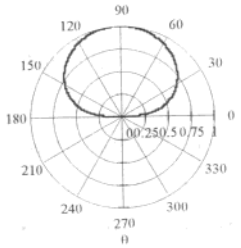
۷. $r\cos(\theta/2)=a$

حل



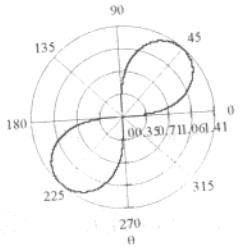
۸. $r^2=a^2\sin\theta$

حل



۹. $r^2=2a^2\sin 2\theta$

حل پروانه

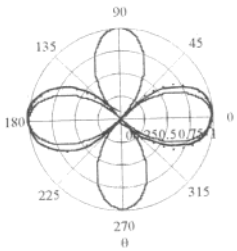


۱۰. $r=a(1-2\sin 3\theta)$

حل گلی در میان گلها

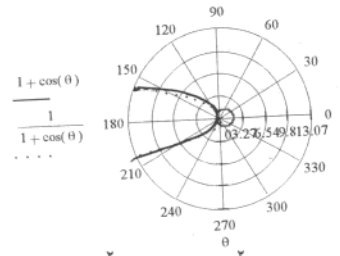
۱۱. الف ـ $r=\cos 2\theta$ ب ـ $r^2=\cos 2\theta$

حل الف ـ گل چهارپر، ب ـ پروانه متقارن نسبت به محور x، محور y و مبدأ



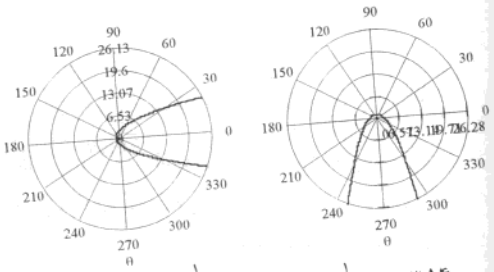
۱۲. الف ـ $r=1+\cos\theta$ ب ـ $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$

حل الف ـ دلگون ب ـ سهمی



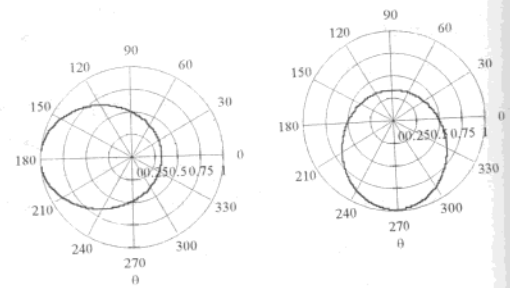
۱۳. الف ـ $r=\frac{۲}{۱-\text{Cos}\theta}$ ب ـ $r=\frac{۲}{۱+\text{Sin}\theta}$

حل الف ـ سهمی، ب ـ سهمی



۱۴. الف ـ $r=\frac{۱}{۲+\text{Cos}\theta}$ ب ـ $r=\frac{۱}{۲+\text{Sin}\theta}$

حل الف ـ بیضی، ب ـ بیضی



در مسأله‌های ۱۵ ـ ۲۲، نقاط تقاطع خمها را بیابید. در همهٔ موارد a یک ثابت مثبت است.

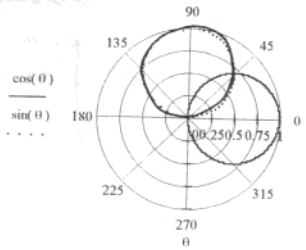
۱۵. $r=a\text{Cos}\theta,\ r=a\text{Sin}\theta$

حل

$$\begin{cases} r=a\text{Cos}\theta \\ r=a\text{Sin}\theta \end{cases} \Rightarrow \tan\theta=۱\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$r(\frac{\pi}{۴})=a\text{Cos}(\frac{\pi}{۴})=\frac{a}{\sqrt{۲}}$$

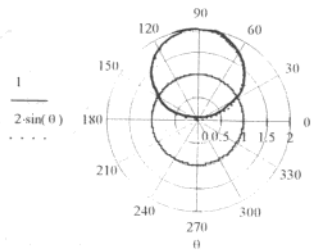
پس تقاطع مبدأ و $(\frac{a}{\sqrt{۲}},\frac{\pi}{۴})$ است توجه کنید این دو خم دو دایره هستند که در مبدأ نیز هم را قطع می‌کنند.



۱۶. $r=a,\ r=۲a\text{Sin}\theta$

حل $r=a, r=۲a\text{Sin}\theta\Rightarrow a=۲a\text{Sin}\theta\Rightarrow\text{Sin}\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}$

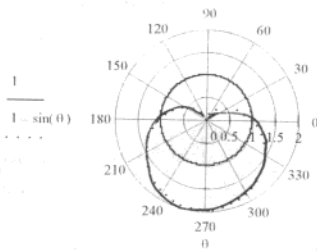
پس این دو دایره همدیگر را در $(a,\frac{\pi}{۶})$ و $(a,\frac{۵\pi}{۶})$ قطع می‌کنند



۱۷. $r=a,\ r=a(۱-\text{Sin}\theta)$

حل $r=a,\ r=a(۱-\text{Sin}\theta)\Rightarrow ۱=۱-\text{Sin}\theta\Rightarrow\text{Sin}\theta=۰\Rightarrow\theta=۰,\pi$

پس نقاط تلاقی $(a,۰)$ و (a,π) می‌باشد.



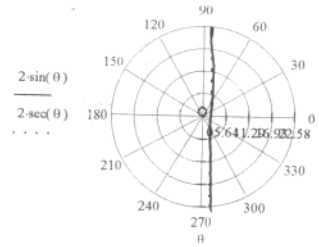
۱۸. $r=۲a\sec\theta,\ r=۲a\text{Sin}\theta$

حل $r=۲a\text{Sin}\theta,\ r=a\sec\theta\Rightarrow ۲a\text{Sin}\theta=a\sec\theta$

$\Rightarrow ۲\text{Sin}\theta=\frac{۱}{\text{Cos}\theta}\Rightarrow ۲\text{Sin}\theta\text{Cos}\theta=۱\Rightarrow\text{Sin}۲\theta=۱$

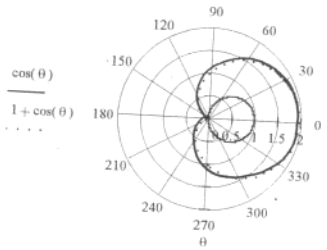
$\Rightarrow ۲\theta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow r(\frac{\pi}{۴})=a\sqrt{۲}$

و نقطه تلاقی $(a\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ است.



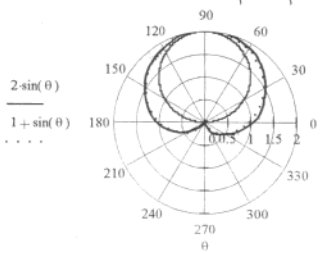
۱۹. $r=a\cos\theta,\ r=a(1+\cos\theta)$

حل با توجه به شکل $(0,0)$ نقطه تلاقی است.



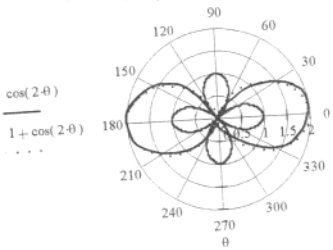
۲۰. $r=a(1+\sin\theta),\ r=2a\sin\theta$

حل $2a\sin\theta=r=a(1+\sin\theta)\Rightarrow\sin\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow r(\frac{\pi}{2})=2a$



۲۱. $r=a(1+\cos2\theta),\ r=a\cos2\theta$

حل با توجه به شکل مبدأ و نقاط $(\frac{a}{2},\frac{\pm\pi}{3})$ و $(\frac{a}{2},\frac{\pm\pi}{3})$ نقاط مورد نظر هستند.



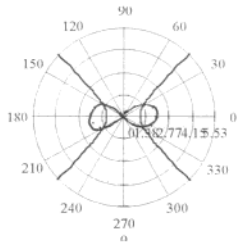
۲۲. $r^2=4\cos2\theta,\ r^2=\sec2\theta$

حل $4\cos2\theta=r^2=\sec2\theta\Rightarrow4\cos2\theta=\frac{1}{\cos2\theta}$

$\Rightarrow\cos^2 2\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos2\theta=\frac{\pm1}{2}\Rightarrow2\theta=\frac{\pm\pi}{3},\ \frac{\pm5\pi}{3}$

$\Rightarrow\theta=\frac{\pm\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$

و نقاط تلاقی $(\sqrt{2},\frac{\pm\pi}{6})$ و $(\sqrt{2},\frac{\pm5\pi}{6})$ هستند.



در مسأله‌های ۲۳ ـ ۲۶، معادله‌های دکارتی مقطعهای مخروطی را پیدا کنید.

۲۳. الف - $r=\frac{1}{1-\cos\theta}$ ب - $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$

حل a) $r=\frac{1}{1-\cos\theta}\Rightarrow r(1-\cos\theta)=1\Rightarrow r-r\cos\theta=1$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1+x\Rightarrow(x^2+y^2)=(1+x)^2\Rightarrow y^2-2x=1$

b) $r=\frac{1}{1+\cos\theta}\Rightarrow r+r\cos\theta=1$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1-x\Rightarrow x^2+y^2=(1-x)^2\Rightarrow y^2+2x=1$

۲۴. الف - $r=\frac{1}{1-\sin\theta}$ ب - $r=\frac{1}{1+\sin\theta}$

حل a) $r-r\sin\theta=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1+y\Rightarrow x^2+y^2=1+2y+y^2$

$\Rightarrow x^2-2y=1$, b) $x^2+2y=1$

۲۵. الف - $r=\frac{1}{1-2\cos\theta}$ ب - $r=\frac{1}{1+2\cos\theta}$

حل a) $3x^2-y^2+4x+1=0$ و b) $3x^2-y^2-4x+1=0$

۲۶. الف - $r=\frac{2}{2-\cos\theta}$ ب - $r=\frac{2}{2+\cos\theta}$

حل a) $3x^2+4y^2-4x-4=0$ و b) $3x^2+4y^2+4x-4=0$

۲۷. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای سهمیی که کانونش در مبدأ و رأس آن در نقطه $(r,\theta)=(1,0)$ است.

حل $r=\frac{ek}{1-e\cos\theta}$, $k=2$, $e=1\Rightarrow r=\frac{2}{1+\cos\theta}$

۲۸. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای خطی که فواصل نقاط تقاطع آن با پرتوهای $\theta=0$ و $\theta=\pi/2$ از مبدأ a و b است.

حل معادله خط مورد نظر $y=\frac{-b}{a}x+b$ است پس داریم

$r\sin\theta=\frac{-b}{a}r\cos\theta+b\Rightarrow r=\frac{ab}{a\sin\theta+b\cos\theta}$

۲۹. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای دایره‌ای که شعاعش a و مرکزش بر پرتو $\theta=\pi$ واقع است و از مبدأ می‌گذرد.

حل $r=2a\cos(\theta+\pi)=-2a\cos\theta$

۳۰. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای سهمیی که کانونش در مبدأ و رأس آن در $(a,\pi/2)$ است.

حل $r=\dfrac{2a}{1+\cos(\theta-\pi/2)}$

۳۱. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای بیضیی که یک کانونهایش در مبدأ و نقطه $(2,0)$اند، و یک رأس آن در $(4,0)$ است.

حل $r=\dfrac{8}{3-\cos\theta}$

۳۲. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای بیضیی که کانونش در مبدأ، مرکزش در $(2,\pi/2)$ و رأس آن در $(1,\pi/2)$ است.

حل $a=1,\ c=2\Rightarrow e=\dfrac{c}{a}=2$ و $k=ae-\dfrac{a}{e}=\dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow r=\frac{ke}{1-e\cos\theta}=\frac{\frac{3}{2}(2)}{1-2\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{3}{1+2\sin\theta}$$

در مسأله‌های ۳۳ ـ ۳۸، کل مساحت محدود به خم را حساب کنید. در همهٔ موارد، a یک ثابت مثبت است.

۳۳. $r^2=a^2\cos2\theta$

حل $\cos2\theta=0\Rightarrow2\theta=\dfrac{\pm\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pm\pi}{4}$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta=2(\frac{1}{2})\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta d\theta$$

$$=a^2\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

توجه کنید شکل مورد نظر پروانه است مساحت یک پر را حساب کرده در ۲ ضرب نموده تا مساحت کل بدست آید.

۳۴. $r=a(2-\cos\theta)$

حل $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}a^2(2-\cos\theta)^2d\theta$

۳۵. $r=a(1+\cos2\theta)$

حل $A=2\displaystyle\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos2\theta)^2d\theta=\dfrac{3a^2\pi}{2}$

برای دیدن شکل تمرین ۲ را مشاهده نمایید.

۳۶. $r=2a\sin3\theta$

حل $\sin3\theta=0\Rightarrow\theta=0,\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow A=3(\dfrac{1}{2})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}4a^2\sin^2 3\theta d\theta$

$$=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\cos6\theta}{2}\right)d\theta=3a^2\left(\theta-\frac{1}{6}\sin6\theta\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi a^2$$

شکل مورد نظر گل ۳ پراست که مساحت یک پر را حساب کرده در ۳ ضرب‌نموده‌ایم.

۳۷. $r^2=2a^2\sin3\theta$

حل $\sin3\theta=0\Rightarrow\theta=0,\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow r=6(\dfrac{1}{2})\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}2a^2\sin3\theta d\theta$

$$=-2a\cos3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=4a^2$$

به علت تقارن مساحت یک پر را حساب کرده در ۶ ضرب نموده‌ایم.

۳۸. $r^2=2a^2\cos^2(\theta/2)$

حل $A=2(\dfrac{1}{2})\displaystyle\int_0^{2\pi}2a^2\cos^2(\frac{\theta}{2})d\theta$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\theta}{2}d\theta=a^2\ [\ \theta+\sin\theta]\ \Big|_0^{2\pi}=2\pi a$$

۳۹. مساحت ناحیه‌ای را که درون دلوار $r=a(1+\sin\theta)$ و بیرون دایرهٔ $r=a\sin\theta$ واقع است، پیدا کنید.

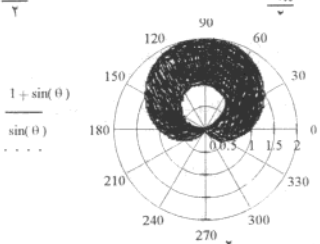
حل (راهنمایی: مساحت دلوار را بدست آورده و از آن مساحت دایره را کم می‌کنیم)

$$A_D=\frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}a^2(1+\sin\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2})d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}\theta-2\cos\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Bigg]_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{9a^2\pi}{4}$$



$$A_C=\pi R^2=\pi a^2\Rightarrow A=A_D-A_C=\frac{9\pi a^2}{4}-\pi a^2=\frac{5\pi a^2}{4}$$

۴۰. مساحت ناحیه‌ای راکه درون خم $r=2a\cos2\theta$ و بیرون خم $r=a\sqrt{2}$ واقع است، به دست آورید.

حل می‌دانیم $r=2\theta\cos2\theta$ یک گل چهار پر و $r=a\sqrt{2}$ یک دایره است. کافی است. بنابر تقارن ناحیه اشتراکی یک پر و دایره را حساب کرده

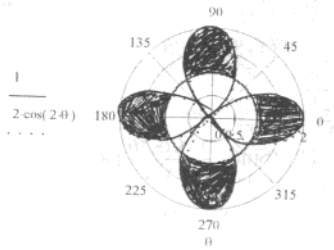
آنرا چهار برابر نماییم.

$$a\sqrt{2}=r=2a\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\theta=\pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow A=4\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{-\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}(4a^2\cos^2 2\theta-2a^2)d\theta$$

$$=2a^2\int_{\frac{-\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}(2+2\cos 4a-2)d\theta=4a^2\int_{\frac{-\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\cos 4\theta d\theta$$

$$=a^2\sin 4\theta\Big]_{\frac{-\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}=2a^2$$



۴۱. ناحیه‌های محدود به خمهای $r=2a\cos^2(\frac{\theta}{2})$ و $r=2a\sin^2(\frac{\theta}{2})$ را با رسم شکل نشان دهید و مساحت قسمت مشترک آنها را حساب کنید.

حل
$$\begin{cases} r=2a\cos^2(\frac{\theta}{2})=a(1+\cos\theta) \\ r=2a\sin^2(\frac{\theta}{2})=a(1-\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pm\pi}{2}$$

حال با مراجعه به مسأله ۱۳ در بخش قبل مسأله داده شده حل شده است.

۴۲. مساحت ناحیه‌ای را که درون پروانهٔ $r^2=2a^2\cos 2\theta$ و بیرون دایره $r=a$ قرار دارد، پیدا کنید.

حل
$$a^2=r^2=2a^2\cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta=\frac{\pm\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pm\pi}{6}$$

$$\Rightarrow A=2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos 2\theta-a^2)d\theta$$

$$\Rightarrow a^2\left[\sin 2\theta-\theta\right]_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

با توجه به تقارن مساحت یک طرف ناحیه اشتراکی را حساب کرده، آنرا در ۲ ضرب نموده‌ایم.

۴۳. اگر $r=a\cos^3(\theta/3)$، نشان دهید که $ds=a\cos^2(\theta/3)d\theta$ و محیط [طول] خم را به دست آورید.

حل
$$r=a\cos^3(\frac{\theta}{3}) \Rightarrow r'=3(\frac{-1}{3})a\cos^2(\frac{\theta}{3})\sin(\frac{\theta}{3})$$

$$ds=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

$$=\sqrt{a^2\cos^6(\frac{\theta}{3})+a^2\cos^4(\frac{\theta}{3})\sin^2(\frac{\theta}{3})}\,d\theta$$

$$=\sqrt{a^2\cos^4(\frac{\theta}{3})+\left[\sin^2(\frac{\theta}{3})+\cos^2(\frac{\theta}{3})\right]}\,d\theta$$

$$=\sqrt{a^2\cos^2(\frac{\theta}{3})}\,d\theta=a\cos^2(\frac{\theta}{3})d\theta$$

$$r=0 \Rightarrow \cos^3(\frac{\theta}{3})=0 \Rightarrow \frac{\theta}{3}=\frac{\pm\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pm 3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow L=\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{r^2+(r')^2}\,dr=\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}a\cos^2(\frac{\theta}{3})d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[1+\cos(\frac{2\theta}{3})\right]d\theta$$

$$=\frac{a}{2}\left[\theta+\frac{3}{2}\sin(\frac{2\theta}{3})\right]_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{3a\pi}{2}$$

۴۴. مساحت رویه‌ای را که از دوران دلوار $r=a(1-\cos\theta)$ حول محور x پدید می‌آید، بیابید. (راهنمایی از اتحادهای $\sin\theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ و $1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$ برای ساده کردن انتگرال استفاده کنید).

حل
$$S=2\pi\int_a^b y\,ds=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

$$r=a(1-\cos\theta) \Rightarrow r'=a\sin\theta$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_0^{\pi} r\sin\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} a(1-\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\,a^2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2\sin^2(\frac{\theta}{2})}\,d\theta$$

$$=4a^2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)(\sin\theta)\left[\sin(\frac{\theta}{2})\right]d\theta$$

$$=4a^2\pi\int_0^{\pi}\left[2\sin^2(\frac{\theta}{2})\right]\left[2\sin(\frac{\theta}{2})\right]$$

$$\cos(\frac{\theta}{2})\left[\sin(\frac{\theta}{2})\right]d\theta=16a^2\pi\int_0^{\pi}\sin^4(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$=16a^2\pi(\frac{2}{5})\sin^5(\frac{\theta}{2})\Big]_0^{\pi}=\frac{32a^2\pi}{5}$$

۴۵. با استفاده از شکل نشان دهید که می‌توان زاویه β بین مماسهای رسم شده بر دو خم در یک نقطهٔ تقاطع آنها را از فرمول زیر به دست آورد.

$$\tan\beta=\frac{\tan\psi_2-\tan\psi_1}{1+\tan\psi_2\tan\psi_1}$$

چه وقتی دو خم یکدیگر را در زاویه‌های قائمه قطع می‌کنند؟

حل ψ_1 زاویه بین مماس و خم اوّل، ψ_2 زاویه بین مماس و خم دوم $\beta=\psi_2-\psi_1$ آنگاه داریم

$$\tan\beta=\tan(\psi_2-\psi_1)=\frac{\tan\psi_2-\tan\psi_1}{1+\tan\psi_2.\tan\psi_1}$$

اگر $\tan\psi_2\tan\psi_1+1=0$ باشد یا $\tan\psi_2=\frac{-1}{\tan\psi_1}$ دو خم بر هم عمودند (می‌توانید رابطه $mm'=-1$ را در نظر بگیرید.

۴۶. مقدار $\tan\psi$ برای خم $r=\sin^4(\theta/4)$ چقدر است؟

حل

$$\tan\psi=\frac{r}{dr/d\theta},\ r=\sin^4(\frac{\theta}{4})$$

$$\Rightarrow\frac{dr}{d\theta}=4(\frac{1}{4})\sin^3(\frac{\theta}{4})\cos(\frac{\theta}{4})\Rightarrow$$

$$\tan\psi=\frac{\sin^4(\frac{\theta}{4})}{\sin^3(\frac{\theta}{4})\cos(\frac{\theta}{4})}=\tan(\frac{\theta}{4})$$

۴۷. زاویه بین خم $r=2a\sin3\theta$ و مماس بر آن به ازای $\theta=\pi/3$ را پیدا کنید.

حل

$$\tan\psi=\frac{r}{r'},\ r'=6a\cos3\theta$$

$$\Rightarrow\tan\psi=\frac{2a\sin3\theta}{6a\cos3\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}\tan(\pi)=0$$

۴۸. نشان دهید که در مارپیچ هذلولوی $r\theta=a$ وقتی θ برابر ۱ رادیان است، $\psi=3\pi/4$ و وقتی مارپیچ حول مبدأ پیچ می‌خورد، $\psi\to\pi/2$ خم را راست کنید و ψ را به ازای $\theta=1\text{radian}$ نشان دهید.

حل

$$\tan\psi=\frac{r}{r'},\ r\theta=a\Rightarrow r=\frac{a}{\theta}\Rightarrow r'=\frac{-a}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow\tan\psi=\frac{\frac{a}{\theta}}{\frac{-a}{\theta^2}}=-\theta\Rightarrow\tan\psi\Big|_{\theta=1}=-1$$

$$\Rightarrow\tan\psi=-1\Rightarrow\psi=\frac{3\pi}{4}$$

۴۹. دایره‌های $r=\sqrt{3}\cos\theta$ و $r=\sin\theta$ در نقطه $(\sqrt{3}/2,\pi/3)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. نشان دهید که مماسهای آنها در این نقطه بر هم عمودند.

حل

$$\begin{cases} r_1=\sqrt{3}\cos\theta\Rightarrow r'_1=-\sqrt{3}\sin\theta\Rightarrow\tan\psi_1=-\cot\theta \\ r_2=\sin\theta\Rightarrow r'_2=\cos\theta\Rightarrow\tan\psi_2=\tan\theta \end{cases}$$

$$m_1=\tan\psi_1\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\cot(\frac{\pi}{3})=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2=\tan\psi_2\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\tan(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$$

$$m_1m_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3})=-1$$

پس مماس‌ها در این نقطه بر هم عمودند

۵۰. دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ و دایره $r=3a\cos\theta$ را در یک نمودار رسم کنید و زاویهٔ بین مماسهای آنها را در نقطهٔ تقاطعی که در ربع اول واقع است، بیابید.

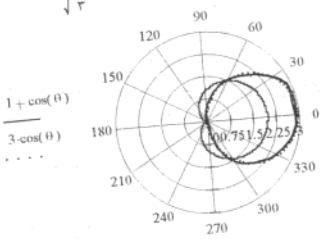
حل

$$a(1+\cos\theta)=r=3a\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \tan\psi_1=\frac{r}{r'}=\frac{3a\cos\theta}{-3a\sin\theta}=\cot\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \tan\psi_2=\frac{r}{r'}=\frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\tan\beta=\tan(\psi_2-\psi_1)=\frac{\tan\psi_2-\tan\psi_1}{1+\tan\psi_2\tan\psi_1}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(-\sqrt{3})(\frac{-1}{\sqrt{3}})}=\frac{-3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\beta=\frac{2\pi}{3}$$



۵۱. نقاط تقاطع سهمیهای $r=\frac{1}{1-\cos\theta}$ و $r=\frac{3}{1+\cos\theta}$ و زاویه‌های بین مماسهای آنها در این نقاط را به دست آورید.

حل $\frac{1}{1-\cos\theta}=r=\frac{3}{1+\cos\theta}\Rightarrow 1+\cos\theta=3-3\cos\theta$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pm\pi}{3}$

پس نقاط تقاطع $(2,\frac{\pm\pi}{3})$ می‌باشند

$$\begin{cases} r_1=\frac{1}{1-\cos\theta}\Rightarrow r'_1=\frac{-\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2} \\ r_2=\frac{3}{1+\cos\theta}\Rightarrow r'_2=\frac{3\sin\theta}{(1+\cos\theta)^3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tan\psi_1=\frac{r_1}{r'_1}=\frac{\frac{1}{1-\cos\theta}}{\frac{-\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}}=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta} \\ \tan\psi_2=\frac{r_2}{r'_2}=\frac{\frac{3}{1+\cos\theta}}{\frac{3\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\tan\psi_1=\left|_{\theta=\frac{\pi}{3}}\right.=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\psi_2=\left|_{\theta=\frac{\pi}{3}}\right.=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\tan\beta=\tan(\psi_2-\psi_1)=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(-\sqrt{3})(\frac{1}{\sqrt{3}})}=\infty\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}$$

$$\tan\psi_1=\left|_{\theta=\frac{-\pi}{3}}\right.=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\psi_2=\left|_{\theta=\frac{-\pi}{3}}\right.=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\tan\beta=\tan(\psi_2-\psi_1)=\frac{-\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{1}{\sqrt{3}})(-\sqrt{3})}=\infty\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}$$

پس در هر دو نقطه مماس‌ها بر هم عمودند

۵۲. نقاطی از دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ را که در آنها خط مماس (الف) افقی، (ب) قائم، است پیدا کنید.

حل وقتی مماس افقی باشد داریم $\psi+\theta=\pi$ یا $\psi=\pi-\theta$ در این صورت می‌توان نوشت:

$\tan\psi=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\quad(*)$

از طرفی $\tan\psi=\frac{r}{r'}$ یا

$\tan\psi=\frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}\quad(**)$

$(*)(**)\Rightarrow-\tan\theta=\tan\psi=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}\Rightarrow\sin^2\theta=\cos\theta(1+\cos\theta)\Rightarrow$

$\sin^2\theta=\cos\theta+\cos^2\theta\Rightarrow 1-\cos^2\theta=\cos\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0\Rightarrow\cos\theta=-1,\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}\text{If}\quad \cos\theta=-1\Rightarrow\theta=\pi \\ \text{If}\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pm\pi}{3}\end{cases}$$

پس در این حالت نقاطی که خط بر دلگون مماس است $(\frac{3a}{2},\frac{\pm\pi}{3})$ و $(0,\pi)$ می‌باشد.

برای حالتی که مماس عمود باشد داریم $\psi+\theta=\frac{\pi}{2}$ یا $\psi=\frac{\pi}{2}-\theta$ در این صورت می‌توان نوشت

$\tan\psi=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta\quad(*)$

از طرفی $\tan\psi=\frac{r}{r'}$ یا

$\tan\psi=\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}\quad(**)$

$(*)(**)\Rightarrow\frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}=\tan\psi=\cot\theta\Rightarrow(1+\cos\theta)=-\cos\theta$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{-1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pm2\pi}{3}\Rightarrow r(\frac{\pm2\pi}{3})=\frac{a}{2}$

پس نقاطی که در آنها مماس عمود است $(\frac{a}{2},\frac{\pm2\pi}{3})$ می‌باشد.

۵۳. نشان دهید که سهمیهای $r=a/(1+\cos\theta)$ و $r=b/(1-\cos\theta)$ در هر یک از نقاط تقاطعشان متعامدند $(ab\neq0)$

حل از رابطه $\tan\psi_1=\frac{1}{\tan\psi_2}$ استفاده می‌کنیم.

$r_1=\frac{a}{1+\cos\theta}\Rightarrow r'_1=\frac{a\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\Rightarrow\tan\psi_1=\frac{r_1}{r'_1}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$r_2=\frac{b}{1-\cos\theta}\Rightarrow r'_1=\frac{-b\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}\Rightarrow\tan\psi_2=\frac{-1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\begin{cases}\tan\psi_1=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=m_1 \\ \tan\psi_2=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}=m_2\end{cases}$$

$m_1m_2=\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}.\frac{(\cos\theta-1)}{\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta-1}{\sin^2\theta}=\frac{-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=-1$

۵۴. زاویه‌ای را به دست آورید که تحت آن زاویه، دلوار $r=a(1-\cos\theta)$ پرتو $\theta=\pi/2$ را قطع می‌کند.

حل $\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\left|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right.=1$

$\Rightarrow\tan\psi=1\Rightarrow\psi=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

۵۵. مطلوب است زاویه بین خط $r=3\sec\theta$ و دلوار $r=2(1+\cos\theta)$ در یکی از نقاطع تقاطع آنها.

حل $3\sec\theta = r = 2(1+\cos\theta) \Rightarrow 3 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 3 = 0 \Rightarrow (2\cos 3\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0,$

$2\cos\theta + 3 \neq 0 \Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pm\pi}{3}$

$$\Rightarrow \tan\psi_1 = \frac{r}{r'} = \frac{4(1+\cos\theta)}{-4\sin\theta} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan\psi_2 = \frac{r}{r'} = \frac{3\sec\theta}{3\sec\theta\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \tan(\psi_2 - \psi_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + (-\sqrt{3})(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \infty \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

به همین شکل برای $\theta = \frac{-\pi}{3}$، $\beta = \frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید.

۵۶. مطلوب است شیب خط مماس بر خم $r = a\tan(\theta/2)$ در $\theta = \pi/2$.

حل $$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{a\tan(\frac{\theta}{2})}{\frac{a}{2}\sec^2(\frac{\theta}{2})}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{4}$$

پس شیب خط مماس $\tan^{-1}(\theta+\psi)$ یعنی $\tan^{-1}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}) = \tan^{-1}(\frac{3\pi}{4}) = -1$ است

۵۷. زاویه‌ای را به دست آورید که تحت آن زاویه، سهمیهای $r = 1/(1-\cos\theta)$ و $r = 1/(1-\sin\theta)$ در ربع اول یکدیگر را قطع می‌کنند.

حل ابتدا نقطه تلاقی را بدست می‌آوریم.

$$\frac{1}{1-\sin\theta} = r = \frac{1}{1-\cos\theta} \Rightarrow 1-\sin\theta = 1-\cos\theta \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$r_1 = \frac{1}{1-\cos\theta} \Rightarrow \tan\psi_1 = \frac{r_1}{r_1'} = \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 1-\sqrt{2}$$

$$r_2 = \frac{1}{1-\sin\theta} \Rightarrow \tan\psi_2 = \frac{r_2}{r_2'} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$$

$$\tan\beta = \tan(\psi_2 - \psi_1) = \frac{(\sqrt{2}-1)-(1-\sqrt{2})}{1+(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

۵۸. معادلهٔ $r^2 = 2\csc 2\theta$ خمی را در مختصات قطبی معرفی می‌کند.

الف ـ این خم را رسم کنید.

ب ـ معادله‌ای برای این خم در مختصات قائم پیدا کنید.

پ ـ زاویه‌ای را که این خم تحت آن زاویه پرتو $\theta = \pi/4$ را قطع می‌کند به دست آورید.

حل $r^2 = 2\csc 2\theta = \frac{2}{\sin 2\theta} = \frac{2}{2\sin\theta\cos\theta} \Rightarrow r^2\sin\theta\cos\theta = 1 \Rightarrow yx = 1$

۵۹. مرکز جرم ناحیهٔ محدود به دلوار $r = a(1+\cos\theta)$ را به دست آورید.

حل $$M = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\cdot\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta d\theta = \frac{1}{3M}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3\pi a^2}{2}\right)}\cdot\left(\frac{5\pi a^3}{4}\right) = \frac{5a}{6}$$

چون منحنی نسبت به محور xها متقارن است پس $y' = 0$ و مرکز جرم در $(\frac{5a}{6}, 0)$ می‌باشد.

۶۰. مرکز جرم ناحیهٔ محدود به نیمدایره‌ای به شعاع a را به دست آورید.

حل می‌توان نیمدایره را بالای محور xها در نظرگرفت پس مرکز جرم نیمدایره روی محور yها قرار دارد و $\bar{x} = 0$ از طرفی $M = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{2}$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\cdot\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta d\theta = \frac{1}{M}\frac{1}{3}\int_0^\pi a^3\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{M}\cdot\frac{2a^3}{3} = \frac{2}{\pi a^2}\cdot\frac{2a^3}{3} = \frac{4a}{3\pi}$$

مرکز جرم در $(0, \frac{4a}{3\pi})$ قرار دارد.

۶۱. مرکز جرم سیم یکنواخت نازکی را که در شکل دلوار $r = a(1+\cos\theta)$ خم شده است، پیدا کنید. (راهنمایی: می‌توانید $\int \cos\theta\cos(\theta/2)d\theta$ را با جانشانی $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ و سپس با فرض $u = \sin(\theta/2)$ محاسبه کنید.)

حل بنا بر تقارن مرکز جرم روی محور xها قرار دارد پس $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} r\cos\theta ds,\ L = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\, d\theta = \int_0^{2}\sqrt{4a^2\cos^2(\frac{\theta}{2})}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos(\frac{\theta}{2})\right| d\theta = 4a\int_0^\pi \cos(\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= 8a\sin(\frac{\theta}{2})\Big]_0^\pi = 8a$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} r\cos\theta ds = \int_0^{2\pi} a(1+\cos\theta)\cos\theta(2a)\left|\cos(\frac{\theta}{2})\right| d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\frac{\theta}{2})\cos\theta\left|\cos(\frac{\theta}{2})\right| d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^\pi \cos^2(\frac{\theta}{2})\left[2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1\right]\cos(\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^\pi \left[2\cos^4(\frac{\theta}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})\right]\cos(\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^\pi \left\{2\left[1-\sin^2(\frac{\theta}{2})\right]^2 - \left[1-\sin^2(\frac{\theta}{2})\right]\right\}\cos(\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$=8a^2\int_0^{\pi}\left[2\sin^4(\frac{\theta}{2})-3\sin^2(\frac{\theta}{2})-1\right]\cos(\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$=8a^2\left[\frac{4}{5}\sin^5(\frac{\theta}{2})-2\sin^3(\frac{\theta}{2})+2\sin(\frac{\theta}{2})\right]_0^{\pi}$$

$$=8a^2\left[\frac{4}{5}-2+2\right]=\frac{32a^2}{5}\Rightarrow\bar{x}=\frac{32a^2}{5}.\frac{1}{8a}=\frac{4a}{5}$$

$$\Rightarrow(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{4a}{5},0\right)$$

توجه کنید چون منحنی نسبت به محور xها متقارن است.

$$\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=2\int_0^{\pi}f(\theta)d\theta$$

فصل یازدهم

دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی

CHAPTER 11. Infinite Sequences and Infinite Series

۱.۱۱ دنباله‌های اعداد

Sequences of Numbers

در مسأله‌های ۱ـ۶، چهار جمله اول دنباله $\{a_n\}$ را به طور صریح بنویسید. اگر دنباله همگراست، حد آن چیست؟

۱. $a_n=\frac{n+1}{2n+1}$

حل

$a_1=\frac{1+1}{2(1)+1}=\frac{2}{3},\ a_2=\frac{2+1}{2(2)+1}=\frac{3}{5}$

$a_3=\frac{3+1}{2(3)+1}=\frac{4}{7},\ a_4=\frac{4+1}{2(4)+1}=\frac{5}{9}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$

۲. $a_n=\frac{2n-1}{n+1}$

حل

$a_1=\frac{2(1)-1}{1+1}=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{2(2)-1}{2+1}=\frac{3}{3}$

$a_3=\frac{2(3)-1}{3+1}=\frac{5}{4},\ a_4=\frac{2(4)-1}{4+1}=\frac{7}{5}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$

۳. $a_n=\frac{1-2n}{1+2n}$

حل

$a_1=\frac{1-2(1)}{1+2(1)}=\frac{-1}{3},\ a_2=\frac{1-2(2)}{1+2(2)}=\frac{-3}{5}$

$a_3=\frac{1-2(3)}{1+2(3)}=\frac{-5}{7},\ a_4=\frac{1-2(4)}{1+2(4)}=\frac{-7}{9}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n}{1+2n}=-1$

۴. $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$

حل

$a_1=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{3}{4}$

$a_3=\frac{2^3-1}{2^3}=\frac{7}{8},\ a_4=\frac{2^4-1}{2^4}=\frac{15}{16}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$

۵. $a_n=\frac{2^n}{n^{2+1}}$

حل

$a_1=\frac{2}{2^{1+1}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{2^2}{2^{2+1}}=\frac{1}{2}$

$a_3=\frac{2^3}{2^{3+1}}=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{2^4}{2^{4+1}}=\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

۶. $a_n=1+\frac{(-1)^n}{2^n}$

حل

$a_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ a_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$a_3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8},\ a_4=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right]=1$

در مسأله‌های ۷ ـ ۱۱، هریک از جملات x_1، x_2، x_3، x_4، x_5 و x_6 را به طور صریح بنویسید.

۷. $x_1=1,\ x_{n+1}=x_n+(\frac{1}{2})^n$

حل

$x_1=1,\ x_2=1+(\frac{1}{2})=\frac{3}{2},\ x_3=\frac{3}{2}+(\frac{1}{2})^2=\frac{7}{4},$

$x_4=\frac{7}{4}+(\frac{1}{2})^3=\frac{15}{8}$ و $x_5=\frac{15}{8}+(\frac{1}{2})^4=\frac{31}{16}$

$x_6=\frac{31}{16}+(\frac{1}{2})^5=\frac{63}{32}$

۸. $x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{x_n}{n+1}$

حل

$x_1=1, x_2=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}, x_3=\frac{\frac{1}{2}}{2+1}=\frac{1}{6}$

$x_4=\frac{\frac{1}{6}}{3+1}=\frac{1}{24},\ x_5=\frac{\frac{1}{24}}{4+1}=\frac{1}{120},\ x_6=\frac{1}{600}$

۹. $x_1=2,\ x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$

حل

$2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$

۱۰. $x_1=-2,\ x_{n+1}=\frac{n}{n+1}x_n$

حل

$-2,-1,\frac{-2}{3},\frac{-1}{2},\frac{-2}{5},\frac{-1}{3}$

۱۱. $x_1=x_2=1$، $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ (این را دنبالهٔ فیبوناتچی می‌نامند. نسبت $r_n=x_n/x_{n+1}$ دنبالهٔ وابستهٔ $r_1,r_2,\ldots$ را به دست می‌دهد)

حل

$1,1,2,3,5,8$

۱۲. اولین جمله دنباله‌ای عبارت است از $x_1=1$ هر یک از جملات بعدی برابر است با مجموع همهٔ جملات قبل از آن $x_{n+1}=x_1+x_2+\ldots+x_n$ تعدادی کافی از جملات اولیهٔ این دنباله را بنویسید تا فرمولی کلی برای x_n بدست آید که به ازای هر $n\geq 2$ برقرار باشد.

حل

$1,1,2,2,4,8,16,32,\ldots$ و $\Rightarrow x_{n+1}=1+\sum_{k=0}^{n-1}2^k,\ n\geq 1$

۱۳. دنباله‌ای از اعداد گویا به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\ldots,\frac{a}{b},\frac{a+2b}{a+b},\ldots$

در اینجا، صورتها یک دنباله تشکیل می‌دهند، مخرجها دنبالهٔ دیگری و نسبتهای آنها نیز دنبالهٔ سومی را به وجود می‌آورند. فرض کنید x_n و y_n به ترتیب، صورت و مخرج کسر nام، $r_n=x_n/y_n$ باشند.

الف ـ تحقیق کنید که $x_1^2-2y_1^2=-1$، $x_2^2-2y_2^2=+1$ و به طور کلیتر، اگر a^2-2b^2 برابر با ۱- یا ۱+ باشد، آنگاه $(a+2b)^2-2(a+b)^2$ به ترتیب

برابر با ۱+ یا ۱- خواهد بود.

ب ـ کسرهای $r_n=x_n/y_n$ وقتی n افزایش می‌یابد به یک حد میل می‌کنند این حد چیست؟ (راهنمایی: با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که $r_n^2-2=\pm(1/y_n)^2$ و y_n کوچکتر از n نیست.)

حل

a) $x_1^2-2y_1^2=1^2-2(1)^2=-1$

$x_2^2-2y_2^2=(3)^2-2(2)^2=9-8=1$

$(a+2b)^2-2(a+b)^2=a^2+2ab+2b^2-2a^2-2ab-2b^2=2b^2-a^2$

$=-(a^2-2b^2)=I$ و If $a^2-2b^2=-1\Rightarrow I=-(-1)=1$

If $a^2-2b^2=1\Rightarrow I=-(1)=-1$

b) $r_n^2-2=\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^2-2=\frac{2b^2-a^2}{(a+b)^2}=\frac{\pm1}{(a+b)^2}=\frac{\pm1}{y_n^2}$

$\Rightarrow r_n^2-2=\frac{\pm1}{y_n^2}\Rightarrow r_n^2=2\pm\left(\frac{1}{y_n}\right)^2\Rightarrow r_n=\sqrt{2\pm\left(\frac{1}{y_n}\right)^2}\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\pm\left(\frac{1}{y_n}\right)^n}=\sqrt{2}$

۲.۱۱ قضیه‌های مربوط به حد

Limit Theorems

در مسأله‌های ۱ـ۱۰، برای هر دنباله $\{a_n\}$ جملات a_1، a_2، a_3 و a_4 را بنویسید. معین کنید که کدام دنباله‌ها همگرایند و کدامها واگرا. حد هر دنباله‌ای را که همگراست، بیابید.

۱. $a_n=\frac{1-n}{n^2}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2}=0$

۲. $a_n=\frac{n}{2^n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{1}{2^n\operatorname{Ln}2}=0$

۳. $a_n=(\frac{1}{3})^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$

۴. $a_n=\frac{1}{n!}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

۵. $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=0$

۶. $a_n=2+(-1)^n$

حل این دنباله حد ندارد. $a_1=2-1=1, a_2=2+1=3, a_3=1, a_4=3$

۷. $a_n=\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}$

حل $a_1=0,\ a_2=-1,\ a_3=0,\ a_4=1$

این دنباله حد ندارد.

۸. $a_n=8^{1/n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}8^{\frac{1}{n}}=8^0=1$

۹. $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}=0$

۱۰. $a_n=\operatorname{Sin}^2\frac{1}{n}+\operatorname{Cos}^2\frac{1}{n}$

حل $\operatorname{Sin}^2(\frac{1}{n})+\operatorname{Cos}^2(\frac{1}{n})=1\Rightarrow a_n=1$

در مسأله‌های ۱۱ـ۵۴، همگرایی یا واگرایی دنباله‌ها را معلوم کنید. حد هر دنباله‌ای را که همگراست بیابید.

۱۱. $a_n=\frac{1}{10n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10n}=0$

۱۲. $a_n=\frac{n}{10}$

حل (واگراست) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{10}=\infty$

۱۳. $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$

۱۴. $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)=0$

۱۵. $a_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$

حل واگراست دارای جملات متناوب ۱± است

۱۶. $a_n=1+(-1)^n$

حل واگراست، دارای جملات متناوب ۰ و ۲ است

۱۷. $a_n=\frac{2n+1}{1-3n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{1-3n}=\frac{-2}{3}$

۱۸. $a_n=\frac{n^2-n}{2n^2+n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$

۱۹. $a_n=\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{n+1}}=\sqrt{2}$

۲۰. $a_n=\frac{\operatorname{Sin}n}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Sin}n}{n}=0$

۲۱. $a_n=\operatorname{Sin}\pi n$

حل $a_n=\operatorname{Sin}\pi n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

۲۲. $a_n=\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2})$

$=\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})=\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2})=1$

۲۳. $a_n=n\pi\operatorname{Cos}n\pi$

حل این دنباله واگراست زیرا جملات آن بطور متناوب ۱± است.

۲۴. $a_n=\frac{\operatorname{Sin}^2n}{2^n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Sin}^2n}{2^n}=0$

۲۵. $a_n=\frac{n^2}{(n+1)^2}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$

۲۶. $a_n=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n}}=1$

۲۷. $a_n=\frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}=-5$

۲۸. $a_n=\sqrt[n]{3^{2n+1}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^{2+\frac{1}{n}}\right)=9$

۲۹. $a_n=\tanh n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tanh n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}=1$

۳۰. $a_n==\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$

۳۱. $a_n=\frac{2(n+1)+1}{2n+1}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{2n+1}=1$

۳۲. $a_n=\frac{(n+1)!}{n!}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

پس دنباله مورد نظر واگراست.

۳۳. $a_n=5$

حل همگراست به ۵

۳۴. $a_n=5^n$

حل واگراست

۳۵. $a_n=(0/5)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(0.5)^n=0$

۳۶. $a_n=\frac{10^{n+1}}{10^n}$

حل (همگراست) $a_n=\frac{10^{n+1}}{10^n}=10\Rightarrow a_n=10$

۳۷. $a_n=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=0$

۳۸. $a_n=(0/03)^{1/n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(0/03)^{\frac{1}{n}}=1$

۳۹. $a_n=\sqrt{2-\frac{1}{n}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{n}}=\sqrt{2}$

۴۰. $a_n=2+(0/1)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}(0/1)^n=2+0=2$

۴۱. $a_n=\frac{3^n}{n^3}$

حل واگراست

۴۲. $a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}=0$

۴۳. $a_n=\ln(n)-\ln(n+1)$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln n-\ln(n+1)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln 1=0$

۴۴. $a_n=\frac{1-2^n}{2^n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{2^n}=-1$

۴۵. $a_n=\frac{n^2-2n+1}{n-1}$

حل

۴۶. $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$

۴۷. $a_n=(\frac{-1}{2})^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=0$

۴۸. $a_n=\frac{\ln n}{\ln 2n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(2n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{2n}}=1$

۴۹. $a_n=\tan^{-1}n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{-1}=\frac{\pi}{2}$

۵۰. $a_n=\sinh(\ln n)$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sinh(\ln n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\ln n}-e^{-\ln n}}{2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n}=\infty$ (واگراست)

۵۱. $a_n=n\sin\frac{1}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

۵۲. $a_n=\frac{2n+\sin n}{n+\cos 5n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\sin n}{n+\cos 5n}=2$

۵۳. $a_n=\frac{n^2}{2n-1}\sin\frac{1}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)(1)=\frac{1}{2}$

۵۴. $a_n=n(1-\cos\frac{1}{n})$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n(1-\cos\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=\!=}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{n^2}\sin\frac{1}{n}}{\frac{-1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\sin(0)=0$$

۵۵. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}(n!/n^n)=0$ (راهنمایی: صورت و مخرج را بسط دهید و خارج قسمت را با $1/n$ مقایسه کنید.)

حل
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}=\frac{1.2.3.....n}{n.n.n.....n}<\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

۵۶. فرض کنید $f(x)$ به ازای هر x در بازهٔ $0\le x\le 1$ تعریف شود، f در $x=0$ مشتقپذیر باشد، و $f(0)=0$ دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ را با قاعدهٔ $a_n=nf(1/n)$ تعریف کنید. نشان دهید که $\lim a_n=f'(0)$

حل
$$\lim_{n\to\infty}=\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}f'\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{-1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}f'\left(\frac{1}{n}\right)=f'\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=f'(0)$$

با استفاده از نتیجهٔ مسأله ۵۹، حد هر یک از دنباله‌ها را در مسائل ۶۰ - ۶۲ بیابید.

۵۷. $a_n=n\tan^{-1}\frac{1}{n}$

حل
$$f(x)=\tan^{-1}x\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(0)=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

۵۸. $a_n=n(e^{1/n}-1)$

حل
$$f(x)=e^x-1\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow f'(x)=e^x\Rightarrow f'(0)=1$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1$$

۵۹. $a_n=n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

حل
$$f(x)=\ln(1+2x)\Rightarrow f(0)=0, f'(x)=\frac{2}{1+2x}$$

$$f'(0)=2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=2$$

۳.۱۱ حدهایی که با آنها بسیار سروکار داریم

Limits that Arise Frequently

$$1.\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,\ 2.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$3.\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1(x>0),\ 4.\lim_{n\to\infty}x^n=0\ \ |x|<1$$

$$5.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,\ 6.\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

در مسأله‌های ۱-۳۳، همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله‌ها را معلوم کنید. حد دنباله‌ای را که همگراست، بیابید.

۱. $a_n=\frac{1+\ln n}{n}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}\right)=0+0=0$$

۲. $a_n=\frac{\ln n}{3n}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{3n}=0$$

۳. $a_n=\frac{(-4)^n}{n!}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n}{n!}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

۴. $a_n=\sqrt[n]{10n}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}\sqrt[n]{n}=(1)(1)=1$$

۵. $a_n=(0/5)^n$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

۶. $a_n=\frac{1}{(0/9)^n}$

حل واگرا $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0/9}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{9}\right)^n=\infty$

۷. $a_n=\left(1+\frac{7}{n}\right)^n$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^n=e^7$$

۸. $a_n=\left(\frac{n+5}{n}\right)^n$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=e^5$$

۹. $a_n=\frac{\ln(n+1)}{n}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$$

۱۰. $a_n=\sqrt[n]{n+1}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$$

۱۱. $a_n=\frac{n!}{10^{6n}}$

حل (واگراست)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{10^{6n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{10^{6n}}{n!}}=\frac{1}{0}=\infty$$

۱۲. $a_n=\frac{1}{\sqrt{2^n}}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$$

۱۳. $a_n=\sqrt[2n]{n}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{n}=\lim_{n\to\infty}\left(n\right)^{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

۱۴. $a_n=(n+4)^{1/(n+4)}$

حل
$$\ln a_n=\ln\left(n+4\right)^{\frac{1}{n+4}}=\frac{1}{n+4}\ln(n+4)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+4)}{n+4}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=e^0=1$$

۱۵. $a_n=\frac{1}{3^{2n-1}}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2n-1}}=0$$

۱۶. $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= \operatorname{Ln}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \operatorname{Ln} e = 1$

۱۷. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$

۱۸. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}$

۱۹. $a_n = \frac{\operatorname{Ln}(2n+1)}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}(2n+1)}{n} = 0$

۲۰. $a_n = \sqrt[n]{2n+1}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1} = 1$

۲۱. $a_n = \sqrt[n]{\frac{x^n}{2n+1}},\ x>0$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{2n+1}} = x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} = x$

۲۲. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1$

۲۳. $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n} = 1$

۲۴. $a_n = \frac{3^n\times 6^n}{2^{-n}\times n!}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{3^n.6^n}{2^{-n}.n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6^{2n}}{n!} = 0$

۲۵. $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$

۲۶. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n n} = 4\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 4(1) = 4$

۲۷. $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

۲۸. $a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}e^{1} = e^0 = 1$

۲۹. $a_n = \frac{\operatorname{Ln}(n^2)}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n^2)}{n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{n} = 2(0) = 0$

۳۰. $a_n = \frac{(\operatorname{Ln} n)^{200}}{n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\operatorname{Ln} n)^{200}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{200(\operatorname{Ln} n)^{199}}{n}$

$= \ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{200!\operatorname{Ln} n}{n} = 200!(0) = 0$

۳۱. $a_n = \frac{\operatorname{Ln} n}{n^{1/n}}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\infty}{1} = \infty$ (واگرا)

۳۲. $a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n\frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\operatorname{Ln} x\right]_1^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln} n}{n} = 0$

۳۳. $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx,\ p>1$

حل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{n\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right]_1^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(n^{1-p}-1\right)$

If $P>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(n^{1-p}-1\right) = \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p+1}$

۴.۱۱ سریهای نامتناهی

Infinite Series

در مسأله‌های ۱ـ۸، عبارت جمع و جوری برای مجموع n جمله، S_n از هر سری پیدا کنید. سپس اگر سری همگراست، مجموع آن را بیابید.

۱. $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}+\ldots$

حل $r=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow S=\frac{a}{1-r},\ a=2, \Rightarrow S=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$

$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r\neq 1 \Rightarrow S_n=\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

۲. $\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\ldots+\frac{9}{100^n}+\ldots$

حل $a=\frac{9}{100},\ r=\frac{1}{100} \Rightarrow S_n=\frac{\frac{9}{100}\left(1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{100}}$

$$=\frac{1}{11}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right],\ r=\frac{1}{100}<1\Rightarrow S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{11}$$

۳. $1+e^{-1}+e^{-2}+\dots+e^{-(n-1)}+\dots$

حل

$$a=1, r=\frac{1}{e}<1\Rightarrow S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}$$

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}$$

۴. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\dots$

حل

$$a=1, r=\frac{-1}{2}<1\Rightarrow S_n=\frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]$$

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

۵. $1-2+4-8+\dots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\dots$

حل

$$a=1,\ r=-2\Rightarrow S_n=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$$

$|r|=2>1$ پس سری واگراست

۶. $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\dots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots$

حل

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\Rightarrow S_n=\frac{n+1-2}{2(n+1)}=\frac{n-1}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$$

۷. $\mathrm{Ln}\frac{1}{2}+\mathrm{Ln}\frac{2}{3}+\mathrm{Ln}\frac{3}{4}+\dots+\mathrm{Ln}\frac{n}{n+1}+\dots$

حل

$$S_n=\mathrm{Ln}\frac{1}{2}+\mathrm{Ln}\frac{2}{3}+\mathrm{Ln}\frac{3}{4}+\dots+\mathrm{Ln}\frac{n}{n+1}=\mathrm{Ln}1-\mathrm{Ln}2$$

$$+\mathrm{Ln}2-\mathrm{Ln}3+\mathrm{Ln}3-\mathrm{Ln}4+\dots-\mathrm{Ln}n+\mathrm{Ln}n-\mathrm{Ln}(n+1)=-\mathrm{Ln}(n+1)$$

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}(n+1)=-\infty$ و سری واگراست

۸. $1+2+3+\dots+n+\dots$

حل

$$S_n=1+2+3+4\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty$$

پس سری داده شده واگراست

۹. سری مذکور در مسأله ۶ را می‌توان به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ نمایش داد. همچنین این سری را می‌توان به شکل مجموع زیر نشان داد که در آن، اندیس از $n=-1$ شروع می‌شود. $\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$ این سری را به شکل مجموعی که با الف) $n=-2$ و ب) $n=0$ و پ) $n=5$ شروع شود نشان دهید.

حل

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)},\quad C)\ \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-3)(n-2)}$$

در هر یک از مسائل ۱۰ـ۱۸، مجموع سری را بیابید.

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

حل

$$r=\frac{1}{4}<1\Rightarrow S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

۱۱. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

حل

$$a=\frac{1}{16}, b=\frac{1}{4}\Rightarrow S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{16}}{1-4}=\frac{1}{12}$$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{4^n}$

حل

$$a=\frac{7}{4}, r=\frac{1}{4}\Rightarrow S=\frac{\frac{7}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{7}{3}$$

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{4^n}$

حل

$$a=5,\ |r|=\left|-\frac{1}{4}\right|<1\Rightarrow S=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=4$$

۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

حل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

$$\Rightarrow S=\frac{5}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=10+\frac{3}{2}=\frac{23}{2}$$

۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

حل در اینجا تفاضل دو سری تمرین قبل را داریم پس $S=10-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{5^n}\right)$

حل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{5^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n\Rightarrow a=1, r=\frac{2}{5}<1$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}$$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

حل
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow r=\frac{2}{5}<1$$

$$a=2=\frac{2}{1-\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$$

در هر یک از مسائل ۱۸-۲۲، مجموع سری را با استفاده از کسرهای ساده بیابید.

۱۸. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

حل
$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=(1-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+\dots+(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1})+\dots$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=1$$

۱۹. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

حل
$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\,\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4n+1})=S_n$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

(لطفاً برای تجزیه مسأله قبل را نگاه کنید.)

۲۰. $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

حل
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=(\frac{1}{9}-\frac{1}{13})+(\frac{1}{13}-\frac{1}{17})+\dots+(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1})$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{9}-\frac{1}{4n+1}\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{9}$$

۲۱. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

حل
$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})+\dots+(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})=1-\frac{1}{(n+1)^2}=S_n$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$$

۲۲. الف ـ عدد اعشاری ... ۰/۲۳۴۲۳۴۲۳۴ را که دارای جزء تکراری است، به صورت یک سری نامتناهی بنویسید و مجموع را به شکل نسبتی از دو عدد صحیح چون p/q بیان کنید.

ب ـ آیا این مطلب درست است که هر عدد اعشاری با جزء تکراری، یک عدد گویا به صورت p/q است؟ برای پاسختان دلیل بیاورید.

حل
$$0/\overline{234}=\frac{234}{10^3}+\frac{234}{10^6}+\frac{234}{10^9}+\dots\Rightarrow a=\frac{234}{10^3},\ r=\frac{1}{10^3}\Rightarrow$$

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{234}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{\frac{234}{10^3}}{\frac{999}{1000}}=\frac{234}{991}=\frac{26}{111}$$

۲۳. عدد اعشاری ...۱/۲۴۱۲۳۱۲۳۱۲۳ را که پس از رقم اولیه دارای جزء تکراری است، به صورت یک عدد گویا p/q بنویسید.

حل
$$1/24\overline{123}=1/24+0/00\overline{123}=1/24+\frac{123}{10^5}+\frac{123}{10^8}+\frac{123}{10^{11}}+\dots$$

$$=1/24+\frac{\frac{123}{10^5}}{1-\frac{1}{10^3}}=1/24+\frac{\frac{123}{10^5}}{\frac{999}{10^3}}=1/24+\frac{123}{99900}$$

$$=\frac{124}{100}+\frac{123}{99900}=\frac{(124)(999)+123}{99900}=$$

در مسائل ۲۵-۳۸، در مورد هر یک از سریها همگرایی یا واگرایی را معلوم کنید و هر کدام که همگراست، مجموعش را بیابید.

۲۴. $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

حل
$$|r|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1\Rightarrow S=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$$

۲۵. $$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}\frac{1}{n}$$

حل واگراست
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}\frac{1}{n}\neq 0$$

۲۶. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$$

حل
$$a=\frac{3}{2},\ |r|=\left|\frac{-1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1\Rightarrow S=\frac{\frac{3}{2}}{1-(\frac{-1}{2})}=1$$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^n$

حل $|r|=\sqrt{2}>1$ پس سری هندسی داده شده واگراست.

۲۸. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\pi$

حل $a_n=\cos n\pi$، a_n دارای جملات متناوب مثبت و منفی یک است پس واگراست. (جمله عمومی حد ندارد)

۲۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{5^n}$

حل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n \Rightarrow |r|=\left|\frac{-1}{5}\right|=\frac{1}{5}<1$

$$S=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$$

۳۰. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}$

حل $|r|=|e^{-2}|=|\frac{1}{e^2}|<1 \Rightarrow S=\frac{1}{1-e^{-2}}=\frac{e^2}{e^2-1}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}$

حل $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\neq 0$

پس سری داده شده واگراست، زیرا شرط لازم برای همگرایی صفر بودن حد جمله عمومی سری است.

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$

حل این سری واگراست زیرا $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{10^n}$

حل $a=\frac{2}{10}, |r|=\frac{1}{10}<1 \Rightarrow S=\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$

۳۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$

حل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

۳۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$

حل واگراست $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}\neq 0$

۳۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1000^n}$

حل واگراست $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(1000)^n}\neq 0$

۳۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}, |x|>1$

حل $|x|>1 \Rightarrow \frac{1}{|x|}<1 \Rightarrow a_n=\frac{1}{|x|}<1$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

در مسائل ۳۸ و ۳۹، برابریها مثالهایی از قضیه ۶ هستند در هر مورد مقدار a و r را پیدا کنید.

۳۸. $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, |x|<1$

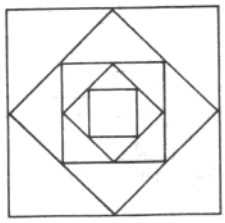
حل $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, |x|<1 \Rightarrow a=1, r=-x$

۳۹. $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x|<1$

حل $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x|<1$

$\Rightarrow a=1, r=-x^2$

۴۰. شکل ۱۰.۱۱ اولین پنج مربع از یک دنبالهٔ نامتناهی از مربعها را نشان می‌دهد. مساحت مربع بزرگ بیرونی، ۴ است و هر یک از مربعهای دیگر با وصل کردن نقاط وسط اضلاع مربع قبل از آن به دست می‌آید. مجموع مساحات همهٔ مربعها را بیابید.



حل $S=4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots)=4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=8$

توجه کنید در هر مرحله مساحت مربع که از وصل کردن نقاط وسط اضلاع مربع قبلی بدست می‌آید. نصف می‌شود.

۴۱. عبارت جمع و جوری برای مجموع جزئی nام سری $\sum(-1)^{n+1}$ بیابید.

حل
$$S_n=\begin{cases}1 & n=2k+1\ ,\ k\in z\\ 0 & n=2\ ,\ k\in z\end{cases}$$

$\Rightarrow S_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$

۴۲. با آوردن مثال نشان دهید که ممکن است مجموع جمله به جملهٔ دو سری واگرا، همگرا باشد.

حل $a_n=n, b_n=-n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -n, \sum_{n=1}^{\infty} n$

۴۳. مطلوب است سریهای هندسی همگرای $A=\sum a_n$ و $B=\sum b_n$ که نشان بدهند $\sum a_n b_n$ ممکن است همگرا باشد بدون اینکه برابر A.B باشد.

حل $A=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ B=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow S_A=2,\ S_B=\frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n \Rightarrow S_{AB}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow S_{AB}=\frac{6}{5}\neq S_A.S_B=2.\frac{3}{2}=3$$

۴۴. با آوردن مثال نشان دهید که ممکن است $\sum (a_n/b_n)$ واگرا باشد در حالی که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند و هیچ b_nی صفر نباشد.

حل فرض کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

۴۵. با آوردن مثال نشان دهید که $\sum (a_n/b_n)$ به مقداری به جز A/B همگرا باشد در حالی که $A=\sum a_n$، $B=\sum b_n\neq 0$، و هیچ b_nی صفر نباشد.

حل تمرین قبل را نگاه کنید.

۴۶. نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد و به ازای هر n، $a_n\neq 0$، آنگاه $\sum (1/a_n)$ واگراست.

حل اگر $\sum a_n$ همگرا باشد داریم $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ و بنابراین $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)\neq 0$ پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ واگراست.

۵.۱۱ سریهای با جملات نامنفی، آزمونهای مقایسه‌ای و انتگرال
Series with Nonnegative terms: Comparision an Integral Tests

در هر یک از مسائل ۱-۲۴، معلوم کنید که سری داده شده همگراست یا واگرا. در هر مورد، برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$

حل سری داده شده یک سری هندسی با $|r|=\frac{1}{10}<1$ می‌باشد پس همگراست.

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$

حل $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim\frac{n}{n+2}=1\neq 0$ و چون حد عمومی سری صفر نمی‌باشد پس شرط لازم برای همگرایی را ندارد در نتیجه واگراست.

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2^n}$

حل می‌دانیم $\sin^2 n\leq 1$ پس $\frac{\sin^2 n}{2^n}<\frac{1}{2^n}$ از طرفی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری داده شده همگراست.

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$

حل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ اما سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگراست و می‌دانیم ضریب یک ثابت در یک سری در واگرایی یا همگرایی آن بی‌تاثیر است پس سری مورد نظر نیز واگراست.

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{n^2}$

حل می‌دانیم $1+\cos n\leq 2$ پس $\frac{1+\cos n}{n^2}\leq\frac{2}{n^2}$ از طرفی سری $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری داده شده نیز همگراست.

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{8^n}$

حل سری داده شده یک سری هندسی با $a=\frac{-1}{8}$ و $|r|=\frac{1}{8}<1$ است پس همگراست.

۷. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

حل به ازای $n>e$ داریم $\frac{1}{n}<\frac{\ln e}{n}$ و چون $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگراست پس طبق آزمون مقایسه سری داده شده نیز واگراست.

۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

حل در اینجا یک سری P با $P=\frac{3}{2}>1$ داریم پس همگراست.

۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$

حل در اینجا یک سری هندسی با $|r|=\frac{2}{3}<1$ داریم پس همگراست.

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{n+1}$

حل $n+1>n \Rightarrow \frac{1}{n}>\frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{-2}{n}<\frac{-2}{n+1}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - ۲

واگراست پس طبق آزمون مقایسه سری موردنظر نیز واگراست.

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+Lnn}$

حل $Lnn<n \Rightarrow 1+Lnn<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+Lnn}$

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ یک سری واگراست پس طبق آزمون مقایسه سری داده شده نیز واگراست.

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n\sqrt{n+1}}$

حل $n^{\frac{3}{2}}<n\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{Ln}{n\sqrt{n+1}}<\frac{Lnn}{n\sqrt{n}}$

اما داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Ln}{n\sqrt{n}}=\int_{2}^{\infty}\frac{Lnx}{x\sqrt{x}}dx$$

$$\begin{cases} u=Lnx \\ \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ \frac{-2}{\sqrt{x}}=v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{2}^{\infty}\frac{Lnx}{x\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{-2Lnx}{\sqrt{x}}\right]_{2}^{\infty}+\int\frac{2dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left.\left(\frac{-2Lnx}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\right]_{2}^{b}=\sqrt{2}(2+Ln2)$$

و چون سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست پس سری داده شده نیز همگراست.

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$

حل $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim\frac{2^n}{n+1}\neq 0$ و چون شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست پس سری داده شده واگراست.

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

حل $\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{3n} \Rightarrow \left(\frac{n}{3n+1}\right)<\left(\frac{n}{3n}\right)=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$

اما سری $\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n$ همگراست پس بنابر آزمون مقایسه سری داده شده نیز همگراست.

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

حل $\frac{1}{n^3+2}<\frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ اما سری $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ یک سری P با $p=\frac{3}{2}>1$ و همگراست پس سری داده شده نیز همگراست.

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(Lnn)^{10}}{n^{2/3}}$

حل

$$\frac{(Lnn)^{10}}{\sqrt{n}\,n^{\frac{2}{3}}}=\frac{(Lnn)^{10}}{n^{\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{3}}}=\frac{(Lnn)^{10}}{n^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}}=\frac{(Lnn)^{10}}{n^{\frac{7}{6}}}$$

$$\frac{(Lnn)^{10}}{n^{\frac{14}{12}}}=\frac{(Lnn)^{10}}{n^{\frac{13}{12}}n^{\frac{1}{12}}}=\frac{(Lnn)^{10}}{n^{\frac{13}{12}}.n^{\frac{10}{12}}}=\frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}.\left(\frac{Lnn}{n^{\frac{1}{120}}}\right)^{10}<\frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$$

اما سری $\sum\frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$ یک سری P با $p=\frac{13}{12}>1$ همگراست و طبق آزمون مقایسه سری داده شده نیز همگراست.

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

حل شرایط آزمون انتگرال برقرار است پس می‌توان نوشت.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left.Ln(x^2+1)\right]_{1}^{b}=\infty$$

واگراست.

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

حل $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1\neq 0$ پس واگراست

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

حل $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$ پس واگراست.

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

حل $n^2<n^2+1 \Rightarrow \frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$

اما سری $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ یک سری P با $P=\frac{3}{2}>1$ است و همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری داده شده نیز همگراست.

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n.2^n}$

حل همگراست، مجموع دوسری همگرا، $\sum\frac{1}{n2^n}$ و $\sum\frac{1}{2^n}$ - است

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Ln2)^n}$

حل واگراست زیرا سری هندسی با $|r|=\frac{1}{\ln 2}>1$ است.

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}+1}$

حل همگراست، مقایسه با $\sum\frac{1}{3^{n-1}}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

حل همگراست مقایسه با سری $\sum\frac{1}{n^2}$

۲۵. نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots$ واگراست.

(راهنمایی: آزمون انتگرال را به کار برید.)

حل شرایط آزمون انتگرال برقرار است و داریم.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{2dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln(2x-1)\Big]_1^b=\infty$$

پس سری مورد نظر واگراست.

۲۶. p- سری لگاریتمی. فرض کنید P یک ثابت مثبت باشد. نشان دهید که $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $P>1$. (انتگرالگیری از ۱ شروع نمی‌شود و از ۲ شروع می‌شود زیرا $\ln 1=0$) در مورد همگرایی یا واگرایی سریهای زیر چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

الف - $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ ب - $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1/01}}$

پ - $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n^{1/2}}{(\ln n)^3}$ ت - $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n^3)}$

ث - $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{(n+1)/n}}$

حل

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_2^b$$

$$=\begin{cases}\frac{-(\ln 2)^{1-p}}{1-p} & p>1\\ \infty & p=1\\ \infty & P<1\end{cases}$$

الف - $p=1$ واگراست.

ب - $p=1/1>1$ همگراست

پ - واگراست.

ت - واگراست زیرا $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n^3)}=\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ و $p=1$

ث - همگراست چون $n\geq 2$ و $p=\frac{n+1}{n}>1$ است.

۲۷. سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1/nx)$ به ازای هیچ مقداری از x همگرا نیست چرا؟

حل چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست.

۲۸. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سری همگرایی با جملات نامنفی باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$ همگراست.

حل $n\geq 1\Rightarrow\frac{1}{n}\leq 1\Rightarrow\frac{a_n}{n}\leq a_n$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست پس بنا بر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ نیز همگراست.

۲۹. با استفاده از آزمون چگالی کوشی در مسأله ۳۲، نشان دهید که

الف - $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ واگراست

ب - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $P>1$ و واگراست اگر $P\leq 1$.

حل الف - بنابر آزمون کشی داریم.

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n\ln 2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

و چون سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست پس سری داده شده نیز واگراست.

ب - بنابر آزمون کشی داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n(1-p)}$$

اگر $P>1$ همگراست و اگر $P\leq 1$ واگراست.

۳۰. اعداد اول دنبالهٔ $\{P_n\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,\dots\}$ را تشکیل می‌دهند. می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}\left[n(\ln n)/P_n\right]=1$ با استفاده از این مطلب نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{P_n}+\dots$$

واگراست. (مسأله ۲۶ را ببینید)

حل داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n(\mathrm{Ln}n)}{P_n}\right]=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{P_n}}{\frac{1}{n\mathrm{Ln}n}}=1$

اما سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\mathrm{Ln}n}$ واگراست و بنابر آزمون مقایسه حدی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n}$ نیز واگراست.

۶.۱۱ سریهای با جملات نامنفی: آزمونهای نسبت و ریشه

Series with Nonnegative Terms: Ratio and Root Tests

The Ratio Test

Let $\sum a_n$ be a series with positive terms, and suppose that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=P$ (Greek Letter rho)

Then
a) the series Converges if $P<1$
b) the series diverges if $P>1$
c) the series may converge of diverge if $P>1$
(The test provides no information.)

The nth - Root Test

Let $\sum a_n$ be a a series with $a_n\geq 0$ for $n\geq n_0$ and suppose tha $\sqrt[n]{a_n}\to P$

Then
a) the series converges if $P<1$
b) the series diverges if $P>1$
c) the test is not conclusive if $p=1$

در مسأله‌های ۱ـ۲۶، معلوم کنید که سری مفروض همگراست یا واگرا. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

حل $a_n=\frac{n^2}{2^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$ (همگراست)

۲. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

حل $a_n=\frac{n!}{10^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(10)10^n}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{1}{10}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty>1$ (واگراست)

۳. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$

حل $a_n=\frac{n^{10}}{10^n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{10}}{10^n}}$

$=\frac{1}{10}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{10}}=\frac{1}{10}(1)<1$ (همگراست)

۴. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$

حل $a_n=n^2e^{-n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2e^{-n-1}}{n^2e^{-n}}$

$=\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}<1$ (همگراست)

۵. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

حل $a_n=\left(\frac{n-2}{n}\right)^n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}\neq 0$ (واگراست)

۶. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{1/25^n}$

حل $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{(1/25)^n}\leq 3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/25}\right)^n$

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/25}\right)^n$ یک سری هندسی با $r=\frac{100}{125}<1$ است که همگراست پس بنابر آزمون مقایسه سری مورد نظر نیز همگراست.

۷. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!e^{-n}$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n!}$

$=\frac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty>1$ (واگراست)

۸. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$

حل یک سری هندسی با $r=\left|\frac{-2}{3}\right|=\frac{2}{3}<1$ و همگراست.

۹. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n=e^{-3}\neq 0$ (واگراست)

۱۰. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

حل $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1\neq 0$ (واگراست)

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Sin}\left(\frac{1}{n}\right)$

حل $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{\text{Sin}t}{t} = 1$

چون سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست پس سری داده شده نیز بنا بر آزمون مقایسه واگراست.

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Sin}\left(\frac{2}{n^2}\right)$

حل همگراست $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}(\frac{2}{n^2})}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\text{Sin}t}{t} = 1$

چون سری $\sum \frac{2}{n^2}$ همگراست بنابر آزمون مقایسه حدی سری $\frac{2}{n^2}$ داده شده نیز همگراست.

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1-\text{Cos}(\frac{1}{n})\right]$

حل $1 - \text{Cos}(\frac{1}{n}) = 2\text{Sin}^2(\frac{1}{2n})$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2\text{Sin}^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} = 2\lim_{t\to 0}\left(\frac{\text{Sin}t}{t}\right)^2 = 2$$

سری $\sum \left(\frac{1}{2n}\right)^2$ یک سری همگراست پس بنا بر آزمون مقایسه حدی داده شده نیز همگراست.

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Sin}^2(\frac{1}{n})$

حل $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\text{Sin}t}{t}\right)^2 = (1)^2 = 1$

چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست بنابر آزمون مقایسه حدی سری داده شده نیز همگراست.

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\text{Ln}n}{n}\right)$

حل واگراست از آزمون مقایسه حدی و سری $\sum \frac{\text{Ln}n}{n}$ استفاده کنید.

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(2^{-n}\text{Ln}n\right)$

حل $2^{-n}\text{Ln}n = \frac{\text{Ln}n}{2^n}$ اما سری $\sum \frac{\text{Ln}n}{2^n}$ یک سری همگراست.

پس $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{\text{Ln}n}{2^n}\right)}{\frac{\text{Ln}n}{2^n}} = 1$ و چون سری $\sum \frac{\text{Ln}}{2^n}$ همگراست بنابر آزمون مقایسه حدی سری داده شده نیز همگراست.

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Ln}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

حل واگراست زیرا $\text{Ln}(\frac{n+2}{n+1}) = \text{Ln}(n+2) - \text{Ln}(n+1)$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Ln}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

حل همگراست چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(\frac{-2}{n^3}\right)}{\frac{-2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$$

و چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس سری داده شده نیز همگراست.

۱۹. $\sum_{n=2}^{\infty} n\text{Sin}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

حل $\lim_{n\to\infty} \frac{n\text{Sin}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\text{Sin}(t)}{t} = 1$

چون سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست پس سری $\frac{1}{n^2}$ داده نیز واگرا می‌باشد.

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\tan\left(\frac{2+n}{n^2+5}\right)$

حل واگراست

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

حل $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)(n+2)} = 0 < 1$

همگراست.

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

حل $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n-1}(n+1)^3}{e^{-n}n^3} = \frac{1}{e} < 1$

همگراست.

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

حل $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}\cdot\frac{3!n!3^n}{(n+3)!} = \frac{1}{3} < 1$

همگراست

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{2^n}$

حل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$$ (همگراست)

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{[2(n+1)+1]!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$$
(همگراست)

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$$
(همگراست)

در مسأله‌های ۲۷ـ۳۲، همهٔ مقادیری از x را که به ازای آنها سری مفروض همگراست، بیابید پیشنهاد: ابتدا در جستجوی سری هندسی برآیید، سپس آزمون نسبت یا آزمون ریشهٔ nام را به کار بگیرید، و در صورت لزوم از آزمونهای دیگری استفاده کنید.

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|nx^n|}{2^n}$

حل
$$a_n=\frac{|nx^n|}{2^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{nx^n}\right|$$
$$=\frac{1}{2}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}|x|<1\Rightarrow|x|<2$$
اگر $x=\pm2$ باشد $a_n=|n|$ و سری واگراست پس به ازای $-2<x<2$ سری مورد نظر همگراست.

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^{2n-1}}{4^n}$

حل
$$a_n=(n+1)\frac{x^{2n-1}}{4^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}x^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{x^2}{4}<1$$
$$\Rightarrow x^2<4\Rightarrow|x|<2\Rightarrow-2<x<2$$
به ازای $x=\pm2$ داریم $a_n=\frac{(n+1)(\pm2)^{2n-1}}{4^n}=\frac{n+1}{2}$ و سری مورد نظر واگراست پس بازه همگرایی $-2<x<2$ است.

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

حل
$$a_n=\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^n}$$
$$=\frac{x^2+1}{3}<1\Rightarrow x^2+1<3\Rightarrow x^2<2\Rightarrow|x|<\sqrt{2}\Rightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$
به ازای $x=\pm\sqrt{2}$ $a_n=1^n$ و سری واگراست پس بازه همگرایی $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ است.

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n}=\frac{1}{|x|}<1\Rightarrow|x|>1$$
اگر $x=\pm1$ و $a_n=1^n$ و سری واگراست.

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n^2}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{x^{2n+3}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^{2n+1}}\right|$$
$$=|x^2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=x^2<1\Rightarrow|x|<1$$
if $x=1\Rightarrow a_n=\frac{1}{n^2}$ (همگراست)

if $x=-1\Rightarrow a_n=\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2}$ (همگراست)

پس بازه همگرایی $-1\le x\le1$ است.

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n!\,|2x|^n}{(2n)!}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{(n+1)!(n+1)!\,|2x|^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!\,|2x|^n}$$
$$=|2x|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{|2x|}{4}=\frac{|x|}{2}<1$$
$$\Rightarrow|x|<2\Rightarrow-2<x<2$$

در هر یک از مسأله‌های ۳۳ ـ ۴۱، جملات یک سری با فرمولهای داده شده تعریف شده‌اند. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا است یا واگرا؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۳. $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1+\sin n}{n}a_n$

حل
$$a_{n+1}=\frac{1+\sin n}{n}a_n\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sin n}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sin n}{n}=0<1$$ (همگراست)

۳۴. $a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{3n-1}{2n+5}a_n$

حل (واگرا)
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n-1}{2n+5}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}>1$$

۳۵. $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

حل $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

آزمون نسبت کارساز نیست

$a_1=3,\ a_2=\frac{1}{1+1}3=\frac{3}{2},\ a_3=\frac{2}{2+1}(\frac{3}{2})=1$

$a_4=\frac{3}{3+1}(1)=\frac{3}{4},\ a_5=\frac{4}{4+1}(\frac{3}{4})=\frac{3}{5}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{3}{n}$

پس سری مورد نظر $\sum\frac{3}{n}$ است با $3\sum\frac{1}{n}$ است و چون $\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس سری مورد نظر نیز واگراست.

۳۶. $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{2}{n}a_n$

حل (همگراست) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$

۳۷. $a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{1+\mathrm{Ln}n}{n}a_n$

حل (همگراست) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\mathrm{Ln}n}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$

۳۸. $a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{n+\mathrm{Ln}n}{n+10}a_n$

حل (واگراست) $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$

۳۹. $a_n=\frac{2^n n!n!}{(2n)!}$

حل $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n.n!n!}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1$ (همگراست)

۴۰. $a_n=\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

حل $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{(3n+3)!}{(n+1)!.(n+2)!(n+3)!}\cdot\frac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n)!}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+2)(n+1)}=27>1$ (واگراست)

۴۱. $a_1=1$، $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}a_n$ (راهنمایی: چند تا از جملات سری را بنویسید، ببینید چه عاملهایی یکدیگر را حذف می‌کنند و سپس تعمیم دهید.

حل همگراست مقایسه با $\sum\frac{1}{n^4}$

۷.۱۱ همگرایی مطلق

Absolute Convergence

if $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ Converges, then $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ Converges

if $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverges

A Series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ is said to ***Converge absolutely*** if $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ Converges

در هر یک از مسأله‌های ۱ـ۱۸، معلوم کنید که سری مطلقاً همگراست یا نه. در هر مورد، برای همگرایی یا واگرایی سری متناظر قدرمطلقها دلیل بیاورید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

حل مطلقاً همگراست، P سری به ازای $P=2>1$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^3}$

حل مطلقاً همگراست زیرا $\sum|a_n|=\sum\frac{1}{n^3}$ و P سری به ازای $p=3>1$ است.

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n^2}$

حل واگراست، $\sum\frac{1}{n}$ واگراست و $\sum\frac{1-n}{n^2}=\sum\frac{1}{n^2}-\sum\frac{1}{n}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

حل $\sum|a_n|=\sum\left(\frac{1}{5}\right)^n$ که یک سری هندسی با $r=\frac{1}{5}<1$ است پس مطلقاً همگراست

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2+2n+1}$

حل این سری مطلقاً همگراست زیرا

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$

و کافی است آنرا با P سری $\sum\frac{1}{n^2}$ مقایسه کنید

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$

حل این سری همگراست ولی همگرای مطلق نمی‌باشد زیرا قدرمطلق آن سری همساز است که یک سری واگراست.

۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Cos}n\pi}{n\sqrt{n}}$

حل مطلقاً همگراست زیرا

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{Cos}n\pi}{n\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

و کافی است آنرا با P سری به ازای $P=\frac{3}{2}>1$ مقایسه کنید.

۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-10}{n}$

حل این سری همگراست ولی همگرای مطلق نمی‌باشد زیرا سری قدرمطلق آن ضریبی از سری واگرای $\sum\frac{1}{n}$ است.

۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

حل این سری همگرای مطلق است زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}=0<1$$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

حل این سری نیز همگرای مطلق است کافی است آزمون نسبت را به کار گیرید

۱۱. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

حل این سری واگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}\neq 0$$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{2^n}$

حل این سری مطلقاً همگراست چراکه داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\right|=\frac{1}{2}<1$$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}(5)^{-n}$

حل $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n,\ r=\frac{1}{5}<1$

مطلقاً همگراست، سری هندسی با $r=\frac{1}{5}<1$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$

حل این سری واگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)=1\neq 0$$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$

حل مطلقاً همگراست، آزمون نسبت

۱۶. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\ln n^2}$

حل واگراست چرا که

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\ln n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

حد فوق وجود ندارد.

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n^3}$

حل مطلقاً همگراست، مقایسه با P سری $2\sum\frac{1}{n^3}-\sum\frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n^3}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

حل این سری مطلقاً همگراست. تفاضل دو سری هندسی با $r<1$ است.

۱۹. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگراست.

حل $a_n\le|a_n|$ آنگاه اگر $\sum a_n$ واگرا باشد بنابر آزمون مقایسه $\sum|a_n|$ هم واگراست

۲۰. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

حل بنابر نامساوی کشی (نامساوی مثلثی) داریم

$$\forall m\in N\quad\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\right|<\sum_{n=1}^{m}|a_n|$$

حال اگر $m\to\infty$ داریم

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\right|<\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}|a_n|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

۲۱. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ هر دو مطلقاً همگرا باشند سریهای زیر نیز چنین هستند.

الف - $\sum(a_n+b_n)$ ب - $\sum(a_n-b_n)$

پ - $\sum ka_n$ (k عددی دلخواه)

حل الف - بنابر نامساوی مثلثی داریم $|a_n+b_n|\le|a_n|+|b_n|\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$$

و بنابر آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|$ همگرا یعنی $\sum (a_n+b_n)$ همگرای مطلق است.

ب ـ داریم

$$|a_n-b_n| = |a_n+(-b_n)| \le |a_n| + |-b_n| = |a_n| + |b_n|$$

$$\Rightarrow \sum |a_n-b_n| \le \sum |a_n| + \sum |b_n|$$

یعنی $\sum |a_n-b_n|$ همگراست پس $\sum (a_n-b_n)$ همگرای مطلق است

۸.۱۱ سریهای متناوب و همگرایی مشروط

Alternating Series and Conditional convergence

Leibniz's Theorem : The Series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

converges if all three of the following conditions are satisfied :

1. the a_n's are all positive
2. $a_n \ge a_{n+1}$ for all n.
3. $a_n \longrightarrow 0$

در مسأله‌های ۱ـ۱۰، معلوم کنید کدام سری تناوب همگرا و کدام واگراست

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

حل این سری مطلقاً همگراست زیرا سری قدرمطلق آن یک P سری با $p=2>1$ است.

۲. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\operatorname{Ln} n}$

حل این یک سری متناوب همگراست زیرا در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند.

1) $\forall n \ge 2 \quad \frac{1}{\operatorname{Ln} n} = a_n > 0$

2) $\forall n \ge 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{\operatorname{Ln}(n+1)} < \frac{1}{\operatorname{Ln} n} = a_n$

3) $\forall n \ge 2, \quad \underset{n\to\infty}{a_n \to 0}, \quad \underset{n\to\infty}{\frac{1}{\operatorname{Ln} n} \to 0}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

حل این یک سری واگراست چرا که جمله عمومی این سری متناوباً ± 1 می‌باشد و حد ندارد

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n^{10}}$

حل واگراست چرا که $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n^{10}} = \infty \ne 0$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

حل این یک سری همگراست که در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند بررسی سه شرط ساده و به خواننده واگذار می‌گردد

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{Ln} n}{n}$

حل این یک سری همگراست چون در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$

حل این سری مطلقاً همگراست چرا که قدرمطلق جملات آن یک P سری با $P=\frac{3}{2}>1$ است.

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{Ln} n}{\operatorname{Ln} n^2}$

حل واگراست زیرا

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Ln} n}{\operatorname{Ln} n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Ln} n}{\operatorname{Ln} n} = \frac{1}{2} \ne 0$$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

حل این یک سری همگراست چرا که در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

حل واگراست زیرا $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} = 3 \ne 0$

در هر یک از مسأله‌های ۱۱ـ۲۸، معلوم کنید که سری داده شده مطلقاً همگراست یا به طور مشروط همگراست و یا اینکه واگراست.

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0/1)^n$

حل این سری مطلق همگراست زیرا سری قدرمطلق آن یک سری هندسی با $|r| = \frac{1}{10} < 1$ است

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

حل همگراست چرا که در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند این سری همگرای مشروط است زیرا سری قدرمطلق آن یک P سری با $P=\frac{1}{2}<1$ است که واگراست

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

حل این سری همگرای مطلق است، سری قدرمطلق آن را با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ مقایسه نمایید

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

حل واگراست

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+3}$

حل این سری همگرای مشروط است چراکه سری قدرمطلق آن واگراست و خود سری در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$

حل این سری همگرای مطلق است چرا $|a_n|=\frac{|\sin n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

حل این سری واگراست زیرا حد جمله عمومی صفر نمی‌باشد.

۱۸. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n^3}$

حل این سری همگرای مشروط است چراکه در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند ولی سری قدرمطلق آن واگراست

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

حل این سری به طور مشروط همگراست چراکه در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند و سری قدرمطلق آن واگراست

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

حل این سری همگرای مطلق است زیرا $\frac{\left|(-2)^{n+1}\right|}{n+5}\le 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و سری $\sum\left(\frac{2}{5}\right)^n$ همگرای مطلق است $r=\frac{2}{5}<1$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(2/3)^n$

حل مطلقاً همگراست

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\frac{2}{3}<1$$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right)$

حل واگراست چراکه $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=1\neq 0$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

حل مطلقاً همگراست چراکه $\sum\frac{1}{n^2}$ و $\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2}$ یک P با $P=2>1$ است.

۲۴. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$

حل این سری همگرای مشروط است چراکه در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند ولی سری قدرمطلق آن واگراست.

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)$

حل واگرا. زیرا تفاضل دو سری واگراست یا

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{2n-n}{2n}=\frac{1}{2n}\Rightarrow\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}\ (\text{واگرا})$$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0/1)^n}{n}$

حل مطلقاً همگراست چراکه $\frac{(0/1)^n}{n}\le(0/1)^n$ و سری $\sum(0/1)^n$ یک سری هندسی با $r=\frac{1}{10}<1$ است.

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

حل به طور مشروط همگراست در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند ولی سری قدرمطلق جملات آن واگراست.

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

حل مطلقاً همگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)!\right]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{1}{4}<1$$

۹.۱۱ مرور Recapitulation

در مسأله‌های ۱-۲۰، معلوم کنید $\sum a_n$ همگراست یا نه.

۱. $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

حل این سری همگراست زیرا در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند.

۲. $a_n=\frac{2^n n!n!}{(2n)!}$

حل واگراست چراکه $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

۳. $a_1=1 \ , \ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

حل همگراست چراکه

$$a_1=1,\ a_2=\frac{-1}{2},\ a_3=\frac{1}{3}, a_4=\frac{-1}{4},\dots,a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

و بنابراین یک سری متناوب داریم این سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ است.

۴. $a_n=n!/n^n$

حل همگراست چراکه $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{n=!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$$

۵. $a_n=n^n/n!$

حل این سری واگراست چراکه داریم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=e>1$$

۶. $a_1=4 \ , \ a_{n+1}=(a_n)^{1/n}$

حل همگراست چرا

$$a_{n+1}=\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt[n]{a_n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$$

۷. $a_n=n^2/2^n$

حل همگراست چراکه داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$$

۸. $a_n=2^n/n^2$

حل واگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}=2>1$$

۹. $a_1=2 \ , \ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

حل همگراست چراکه داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1$

۱۰. $a_1=1 \ , \ a_{n+1}=2a_n$

حل واگراست چراکه داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2>1$

۱۱. $a_n=2 \ , \ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

حل $a_1=2,a_2=\frac{2}{2},a_3=\frac{2}{3},a_4=\frac{2}{4},\dots,a_n=\frac{2}{n}$

پس سری مورد نظر $2\sum\frac{1}{n}$ است که واگراست.

۱۲. $a_n=\frac{1}{2} \ , \ a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$

حل واگراست چراکه داریم

$$a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},a_3=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)=1$$

و از این جمله به بعد $a_n>1$ پس $n\geq 4\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$

۱۳. $a_1=1 \ , \ a_{n+1}=\frac{1}{(1+a_n)}$

حل واگراست چراکه

$$a_n\leq 1\Rightarrow 1+a_n\leq 2\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}\geq\frac{1}{2}\neq 0$$

۱۴. $a_1=0 \ , \ a_{n+1}=na_n$

حل این سری همگراست چراکه همه جمله‌های آن صفر است.

۱۵. $a_1=1 \ , \ a_{n+1}=na_n$

حل این سری واگراست چراکه $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$

۱۶. $a_1=10 \ , \ a_{n+1}=\frac{a_n}{n}$

حل این سری همگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

۱۷. $a_n=1$ اگر n فرد باشد، $a_n=-1$ اگر n زوج باشد.

حل این سری واگراست، جمله عمومی حد ندارد.

۱۸. $a_n=1/3^n$ اگر n فرد باشد، $a_n=-n/3^n$ اگر n زوج باشد.

حل این سری همگرایی مطلق است با سری هندسی $r<1$ مقایسه گردد.

۱۹. $a_n=\frac{\sin n}{n^2}$

حل این سری هم همگراست با P سری، $P=2>1$ مقایسه گردد.

۲۰. $a_n=\frac{2n+3}{n^3+2}$

حل این سری همگراست، P سری $P=2>1$ مقایسه گردد.

مسأله‌های گوناگون

MISCELLANCEOUS PROBLEMS

۱. مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=2}^{\infty}\mathrm{Ln}(1-1/n^2)$ را به طور صریح پیدا

کنید، و از آنجا معلوم کنید که این سری همگراست یا نه.

حل

$$\sum_{n=2}^{m} \mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{m}\left[\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{m}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right)+\mathrm{Ln}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{m}\left[\mathrm{Ln}(n+1)-\mathrm{Ln}n+\mathrm{Ln}(n-1)-\mathrm{Ln}m\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{m}\left[\mathrm{Ln}(n+1)-2\mathrm{Ln}n+\mathrm{Ln}(n-1)\right]$$

$$=\{\mathrm{Ln}(3)-2\mathrm{Ln}2+\mathrm{Ln}(1)\}$$

$$+\{\mathrm{Ln}(4)-2\mathrm{Ln}3+\mathrm{Ln}2\}$$

$$+\{\mathrm{Ln}(5)-2\mathrm{Ln}4+\mathrm{Ln}3\}$$

$$+\{\mathrm{Ln}6-2\mathrm{Ln}5+\mathrm{Ln}4\}$$

$$\vdots$$

$$+\{\mathrm{Ln}(m+1)-2\mathrm{Ln}m+\mathrm{Ln}(m-1)\}$$

$$=\mathrm{Ln}(m+1)-\mathrm{Ln}m-\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}\frac{m+1}{2m}=S_m$$

$$S=\lim_{m\to\infty} S_m=\lim_{m\to\infty}\mathrm{Ln}\frac{m+1}{2m}=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$$

۲. $\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k^2-1)$ را محاسبه کنید؛ به این منظور، مجموع جزئی nام را بیابید و حد آن را وقتی n بینهایت می‌شود پیدا کنید.

حل

$$\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{(k+1)(k-1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right]$$

$$\Rightarrow S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}$$

۳. ثابت کنید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ و سری $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$ با هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا.

حل راهنمایی: سری رابط دهید.

۴. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

الف) همگراست؟ ب) مطلقاً همگراست؟

پ) به طور مشروط همگراست؟ ت) واگراست؟

حل الف ـ این سری در شرایط قضیه لایب صدق می‌کند پس همگراست.

ب ـ خیر. سری قدر مطلق آن واگراست

پ ـ وقتی یک سری به طور مطلق همگرا نباشد، و همگرا باشد، پس با توجه به سری داده شده و قسمت (الف) به طور مشروط همگراست.

ت ـ خیر

۵. با فرض اینکه $|x|>1$ نشان دهید که

$$\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\dots$$

حل

$$|x|>1\Rightarrow\frac{1}{|x|}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(x)^n}=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\dots=\frac{\frac{-1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{1-x}$$

۶. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{sech}n$ همگراست؟ چرا؟

حل همگراست چرا که داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sech}n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n+e^{-n}}<2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\Rightarrow r=\frac{1}{e}<1$$

۷. آیا $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tanh n$ همگراست؟ چرا؟

همگرایی یا واگرایی سریهایی را که جمله‌های nام آنها در مسائل ۸ـ۱۹ داده شده، ثابت کنید.

حل خیر. حد جمله عمومی ناصفر است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\tanh n=1\neq 0$$

۸. $\frac{1}{\mathrm{Ln}(n+1)}$

حل

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\mathrm{Ln}(n+1)}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{Ln}(n+1)}$$

سری $\sum\frac{1}{n+1}$ واگراست پس بنابر آزمون مقایسه مورد نظر نیز واگراست.

۹. $\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$

حل واگراست چرا که با آزمون نسبت داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{\frac{n}{2(n+1)(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

و چون $\sum \frac{1}{n}$ واگراست پس سری مورد نظر نیز واگراست.

۱۰. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

حل واگراست. مقایسه با سری $\sum \frac{1}{n}$

۱۱. $\frac{1}{n(Lnn)^2}$, $n \geq 2$

حل همگراست چراکه شرایط آزمون انتگرال برقرار است و داریم.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(Lnx)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(Lnx)^2}$$
$$= -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{Lnx}\right)_2^b = \frac{1}{Ln2}$$

۱۲. $\frac{1+(-2)^{n-1}}{2^n}$

حل واگراست زیرا جمله عمومی سری حد ندارد

۱۳. $\frac{n}{1000n^2+1}$

حل واگراست، مقایسه با سری $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1000n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1000n^2+1} = \frac{1}{1000}$$

۱۴. $e^n/n!$

حل همگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} = e\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

۱۵. $\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

حل همگراست، مقایسه با P سری با $P=\frac{3}{2}>1$

۱۶. $\frac{1}{n^{1+1/n}}$

حل واگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n.\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

۱۷. $\frac{1\times3\times5\ldots(2n-1)}{2\times4\times6\ldots(2n)}$

حل واگراست چراکه

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \geq \frac{1.2.4\ldots(2n-2)}{2.4.6\ldots(2n-2)(2n)} = \frac{1}{2n}$$

اما سری $\sum \frac{1}{2n}$ واگراست پس بنابر آزمون مقایسه سری مورد نظر نیز واگراست.

۱۸. $\frac{n^2}{n^3+1}$

حل واگراست. مقایسه با سری $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1$$

۱۹. $\frac{n+1}{n!}$

حل همگراست چراکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0 < 1$$

۲۰. اگر سری زیر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

حل $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}, S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

توجه کنید این سری همگراست چراکه $\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$

و اگر $\sum \frac{1}{n^2}$ یک سری همگراست.

۲۱. الف) فرض کنید a_1، a_2، a_3، ... ، a_n اعداد مثبتی هستند که در شرطهای زیر صدق می‌کنند.

i) $a_1 \geq a_2 \geq a_4 \geq \ldots$

ii) سری $a_2+a_4+a_8+a_{16}+\ldots$ واگراست. نشان دهید که سری زیر واگراست.

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ بالا نشان دهید که سری زیر واگراست.

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nLnn}$$

حل $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} \ldots \geq a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_5}{5} + \frac{a_5}{6} + \frac{a_5}{7} + \frac{a_5}{8} + \ldots$

$= a_1 + \frac{1}{2}a_2 + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})a_4 + (\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})a_8 + \ldots$

$\geq \frac{1}{2}(a_2+a_4+a_8+\ldots)$

طبق قسمت (ii) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ واگراست پس $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ هم واگراست

پس بنا بر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ هم واگراست.

ب ـ به سادگی می‌توان بررسی کنید شرایط i و (ii) برقرار هستند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Ln(n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2Lnn} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Lnn}$$

این سری واگراست پس $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n}$

طبق نتیجه قسمت (الف واگراست)

۲۲. فرض کنید سری $\sum a_n$ ، $a_n \neq ۱$ ، $a_n > ۰$، همگراست.

الف) نشان دهید که $\sum a_n^۲$ همگراست.

ب) آیا $\sum a_n/(۱-a_n)$ همگراست؟ توضیح دهید.

حل الف ـ اگر $\sum a_n$ همگراست پس دارای مجموع متناهی S است.

$$S=\sum a_n \Rightarrow a_n^۲ = a_n . a_n \leq S a_n$$

S متناهی است پس $\sum a_n$ S همگراست و بنابر آزمون مقایسه $\sum a_n^۲$ هم همگراست.

ب ـ بله طبق آزمون مقایسه حدی داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{۱-a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۱-a_n} = \frac{۱}{۱-\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = ۱$$

چون $\sum a_n$ همگراست پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰$ است

۲۳. اگر p عدد ثابتی باشد، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n \operatorname{Ln}n((\operatorname{Ln}n))^p}$$

الف) همگراست اگر $p>۱$

ب) واگراست اگر $p\leq ۱$.

(نکته اگر $f_n(x)=x$ ؛ $f_{n+۱}(x)=(\operatorname{Ln}(f_n(x))$ ؛ و n مقادیر ۱، ۲، ۳، ... ، را اختیار کند داریم $f_۲(x)=\operatorname{Ln}x$، $f_۳(x)=\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}x)$ و الی آخر. پس به شرط اینکه حد بالای انتگرال چنان باشد که $f_n(a)>۱$، آنگاه

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{f_۱(x)f_۲(x)\ldots f_n(x)(f_{n+۱}(x))^p}$$

(i) همگراست وقتی $p>۱$ و (ii) واگراست وقتی $p\leq ۱$.)

حل

$$\int_۳^{\infty} \frac{dx}{x\operatorname{Ln}x(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}x))^p} = \lim_{b\to\infty} \int_۳^b \frac{dx}{x\operatorname{Ln}x(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}x))^p}$$

$$\lim_{b\to\infty} \left.\frac{۱}{(۱-p)(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}x))^{۱-p}}\right]_۳^b = \begin{cases} \dfrac{-۱}{(۱-p)(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}۳))^{۱-p}}, & P>۱ \\ \infty & p\leq ۱ \end{cases}$$

فصل دوازدهم
سریهای توانی

CHAPTER12. Power Series

۲.۱۲ چند جمله‌ای تیلر
Taylor Polynomials

The Maclaurin Series Generated by f
$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$

The Taylor series Generated by f at x=a
$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$

در مسأله‌های ۱ـ۹، با استفاده از رابطه (۲) چند جمله ایهای تیلر $P_3(x)$ و $P_4(x)$ را برای هر یک از تابعهای $f(x)$ ذیل در $x=0$ بنویسید. در هر مورد، اولین گام شما باید پر کردن جدولی نظیر جدول زیر باشد.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0		
1		
2		
3		
4		

۱. e^{-x}

حل ⇒ $P_k(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

$P_3(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$

$P_4(0)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	e^{-x}	1
1	$-e^{-x}$	-1
2	e^{-x}	1
3	$-e^{-x}$	-1
4	e^{-x}	1

$\Rightarrow P_3(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$ و $P_4(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$

۲. Sinx

حل

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	Sinx	0
1	Cosx	1
2	-Sinx	0
3	-Cosx	-1
4	Sinx	0

$\Rightarrow P_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}$

$P_4(x)=x-\frac{x^3}{3!}+0=x-\frac{x^3}{3!}$

۳. Cosx

حل

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	Cosx	1
1	-Sinx	0
2	-Cosx	-1
3	Sinx	0
4	Cosx	1

$\Rightarrow P_3(x)=1+0-\frac{x^2}{2!}+0=1-\frac{x^2}{2!}$

$P_4(x)=1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$

۴. $\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{2})$

حل

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{2})$	1
1	$\mathrm{Cos}(x+\frac{\pi}{2})$	0
2	$-\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{2})$	-1
3	$-\mathrm{Cos}(x+\frac{\pi}{2})$	0
4	$\mathrm{Sin}(x+\frac{\pi}{2})$	1

$\Rightarrow P_3(x)=1+0-\frac{x^2}{2!}+0=1-\frac{x^2}{2!}$

$P_4(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$

۵. Sinhx

حل

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	Sinhx	0
1	Coshx	1
2	Sinhx	0
3	Coshx	1
4	Sinhx	0

$\Rightarrow P_3(x)=x+\frac{x^3}{3!}$, $P_4(x)=x+\frac{x^3}{3!}$

۶. Coshx

حل

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
۰	Coshx	۱
۱	Sinhx	۰
۲	Coshx	۱
۳	Sinhx	۰
۴	Coshx	۱

$$\Rightarrow P_3(x)=1+\frac{x^2}{2!},\ P_4(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

۷. x^4-2x+1

حل

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
۰	x^4-2x+1	۱
۱	$4x^3-2$	-2
۲	$12x^2$	۰
۳	$24x$	۰
۴	۲۴	۲۴

$$\Rightarrow P_3(x)=1-2x \text{ و } P_4(x)=1-2x+x^4$$

۸. x^3-2x+1

حل

$$\Rightarrow P_3(x)=1-2x+x^3=P_4(x)$$

۹. x^2-2x+1

حل

$$P_3(x)=P_4(x)=1-2x+x^2$$

در مسأله‌های ۱۰ـ۱۳ سری مکلورن تولید شده به وسیله هر تابع را بیابید.

۱۰. $\frac{1}{1+x}$

حل سری مکلورن از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

$$f(x)=(1+x)^{-1}\Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=-(1+x)^{-2}\Rightarrow f'(0)=-1=-1!$$
$$f''(x)=2(x-1)^{-3}\Rightarrow f''(0)=2=2!$$
$$f'''(x)=-6(x-1)^{-4}\Rightarrow f'''(0)=-6=-3!$$
$$f^{(4)}(x)=24(1-x)^{-5}\Rightarrow f^{(4)}(0)=4!$$
$$f^{(5)}(x)=-120(1-x)^{-6}\Rightarrow f^{(5)}(0)=-5!$$
$$\Rightarrow\frac{1}{1+x}=f(x)=1-x+\frac{2!}{2!}x^2-\frac{3!}{3!}x^3+\frac{4!}{4!}x^4-\frac{5!}{5!}x^5+\dots+\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n+\dots$$
$$=1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n$$

۱۱. x^2

حل

$$f(x)=x^2\Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=2x\Rightarrow f'(0)=0$$
$$f''(x)=2\Rightarrow f''(0)=2$$
$$n\geq 3, f^{(n)}(x)=0\Rightarrow f^{(n)}(0)=0\Rightarrow x^2=f(x)=0+0+\frac{2}{2!}x^2=x^2$$

۱۲. $(1+x)^2$

حل

$$f(x)=(1+x)^2\Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=2(1+x)\Rightarrow f'(0)=2$$
$$f''(x)=2\Rightarrow f''(0)=2$$
$$n\geq 2, f^{(x)}(x)=0\Rightarrow f^{(n)}(0)=0\Rightarrow(1+x)^2=f(x)=1+\frac{2}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2$$
$$=1+2x+x^2$$

۱۳. $(1+x)^{3/2}$

حل

$$f(x)=\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=\frac{3}{2}\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(0)=\frac{3}{2}$$
$$f''(x)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+x\right)^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow f''(0)=\frac{3}{2^2}$$
$$f^{(3)}(x)=\left(\frac{3}{2^2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(1+x\right)^{\frac{-3}{2}}\Rightarrow f^{(3)}(0)=\frac{(-1)(1)(3)}{2^3}$$
$$f^{(4)}(x)=\frac{(-1)(1)(3)}{2^3}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\left(1+x\right)^{\frac{-5}{2}}\Rightarrow f^{(4)}(0)=\frac{(-1)(1)(3)(-3)}{2^4}$$
$$\Rightarrow\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}=f(x)=1+\frac{3}{2}x+\left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)x^3+\dots+$$
$$\left(\frac{1}{n!}\right)\left[(3)(1)(-1)(-3)\dots(5-2n)\right]\frac{x^n}{2^n}+\dots$$

۱۴. سری مکلورن تابع $f(x)=1/(1-x)$ را بیابید. نشان دهید که این سری واگراست وقتی $|x|\geq 1$ و همگراست وقتی $|x|<1$

حل

$$f(x)=(1-x)^{-1}\Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=(1-x)^{-2}\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=2(1-x)^{-3}\Rightarrow f''(0)=2$$
$$f^{(3)}(x)=3!(1-x)^{-4}\Rightarrow f^{(3)}(0)=3!$$
$$f^{(4)}(x)=4!(1-x)^{-5}\Rightarrow f^{(4)}(0)=4!$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-n-1}\Rightarrow f^{(n)}(0)=n!\Rightarrow$$
$$\frac{1}{1-x}=f(x)=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

یک سری یک سری هندسی با $r=x$ است حال اگر $|r|=|x|\leq 1$ باشد سری همگراست در غیر این صورت واگراست

در مسأله‌های ۱۵ ـ ۲۰، فرمول (۷) را به کار بگیرید و سری تیلر تولید شده به وسیله تابع مفروض حول نقطه مفروض را بنویسید.

۱۵. $f(x)=e^x,\ a=10$

حل فرمول تیلر یا بسط تابع حول نقطه $x_0=a$ به صورت زیر است.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

۱۶. $f(x)=x^2\ ,\ a=\frac{1}{2}$

حل

$f(x)=x^2\Rightarrow f(a)=f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$f'(x)=2x\Rightarrow f'(a)=f'(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})=1$

$f''(x)=2\Rightarrow f''(\frac{1}{2})=2$ و $n\geq 3\ f^{(n)}(x)=0\Rightarrow f^{(n)}(a)=f^{(n)}(\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow f(x)=x^2=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$

$=\frac{1}{4}+(x-\frac{1}{2})+\frac{2}{2!}(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}+(x-\frac{1}{2})+(x-\frac{1}{2})^2$

۱۷. $f(x)=\mathrm{Ln}x\ ,\ a=1$

حل

$f(x)=\mathrm{Ln}x\Rightarrow f(a)=f(1)=\mathrm{Ln}1=0$

$f'(x)=x^{-1}\Rightarrow f'(1)=1\ ,\ f''(x)=-x^{-2}\Rightarrow f''(1)=-1$

$f'''(x)=+2x^{-3}\Rightarrow f'''(1)=2=2!$

$f^{(4)}(x)=-6x^{-4}\Rightarrow f^{(4)}(1)=-6=-3!\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

$\Rightarrow f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!\Rightarrow \mathrm{Ln}(x)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$

۱۸. $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ a=4$

حل

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f(a)=f(4)=2$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$

$f''(x)=\frac{-1}{2^2}x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f''(4)=\frac{-1}{2^5}$

$f'''(x)=\frac{3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f^{(3)}(4)=\frac{3}{2^8}$

$f^{(4)}(x)=\frac{3(-5)}{2^4}x^{\frac{-7}{2}}\Rightarrow f^{(4)}(4)=\frac{(3)(5)}{2^{11}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$

$=2+\frac{(x-4)}{2^2}-\frac{1!}{2!2^5}(x-4)^2+\frac{3}{3!2^8}(x-4)^3-\frac{(3)(5)}{4!2^{11}}(x-4)^4+\ldots$

۱۹. $f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ a=-1$

حل

$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f(-1)=-1$

$f'(x)=-x^{-2}\Rightarrow f'(-1)=-1=-1!$

$f''(x)=2x^{-3}\Rightarrow f''(-1)=-2=-2!$

$f'''(x)=-6!x^{-4}\Rightarrow f'''(-1)=-3!$

$f^{(4)}(x)=4!x^{-5}\Rightarrow f^{(4)}(-1)=-4!\Rightarrow f^{(n)}(-1)=-n!$

$\Rightarrow\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x-1)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-n!}{n!}(x-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$

۲۰. $f(x)=\mathrm{Cos}x\ ,\ a=\frac{-\pi}{4}$

حل

$f(x)=\mathrm{Cos}x\Rightarrow f(\frac{-\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(x)=-\mathrm{Sin}x\Rightarrow f'(\frac{-\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x)=-\mathrm{Cos}x\Rightarrow f''(\frac{-\pi}{4})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$f^{(3)}(x)=\mathrm{Sin}x\Rightarrow f^{(3)}(\frac{-\pi}{4})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\mathrm{Cos}x=f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots\right\}$

در مسأله‌های ۲۱ و ۲۲ مجموع اولین سه جملهٔ سری تیلر را برای تابع مفروض حول نقطهٔ مفروض a بنویسید.

۲۱. $f(x)=\tan x\ ,\ a=\frac{\pi}{4}$

حل

$f(x)=\tan x\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})=1$

$f'(x)=\sec^2x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=2$

$f''(x)=2\sec^2x\tan x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=2(2)=4$

$\Rightarrow\tan x\cong 1+2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{4}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2$

۲۲. $f(x)=\mathrm{Ln}\mathrm{Cos}x\ ,\ a=\frac{\pi}{3}$

حل

$f(x)=\mathrm{Ln}\mathrm{Cos}x\Rightarrow f(\frac{\pi}{3})=\mathrm{Ln}\frac{1}{2}$

$f'(x)=-\tan x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$

$f''(x)=-2\sec^2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{3})=-4\Rightarrow\mathrm{Ln}\mathrm{Cos}x\cong\mathrm{Ln}\frac{1}{2}-\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{3})$

$-\frac{4}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2$

۳.۱۲ قضیهٔ تیلر با باقیمانده: سینوسها، کسینوسها، و e^x

Taylor's Theorem with Reminder Sines Cosines, ana e^x

Taylor's Theorem

if f and its first n derivatives $f'', f'', \ldots, f^{(n)}$ are continuous on [a,b] or on [b,a], and $f^{(n)}$ is differentiable on (a,b) or on (b,a), then there exists anumber c between a and b such that $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ \mathrm{Sin}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\mathrm{Cos}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}$$

در مسأله‌های ۱ـ۶، سری مکلورن هر تابع را بنویسید.

۱. $e^{x/2}$

حل
$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Rightarrow e^{(\frac{x}{2})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^k}{k!}=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k k!}$$

۲. $\operatorname{Sin}3x$

حل
$$\operatorname{Sin}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Rightarrow \operatorname{Sin}(3x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (3x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

۳. $5\operatorname{Cos}\frac{x}{\pi}$

حل
$$\operatorname{Cos}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\Rightarrow \operatorname{Cos}(\frac{x}{\pi})=5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (\frac{x}{\pi})^{2k}}{(2k)!}$$

۴. $\operatorname{Sinh}x$

حل
$$\operatorname{Sinh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k-(-x)^k}{k!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

۵. $\frac{x^2}{2}-1+\operatorname{Cos}x$

حل
$$\frac{x^2}{2}-1+\operatorname{Cos}x=\frac{x^2}{2}-1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$
$$=\frac{x^2}{2}-1+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

۶. $\operatorname{Cos}^2x=\frac{1+\operatorname{Cos}2x}{2}$

حل
$$\operatorname{Cos}^2x=\frac{1+\operatorname{Cos}2x}{2}=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\right]$$

۷. با استفاده از سری ثابت کنید که

الف ـ $\operatorname{Cos}(-x)=\operatorname{Cos}x$ ب ـ $\operatorname{Sin}(-x)=-\operatorname{Sin}x$

حل
$$a)\ \operatorname{Cos}(-x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-x)^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\operatorname{Cos}x$$
$$b)\ \operatorname{Sin}(-x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}=-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=-\operatorname{Sin}x$$

۸. نشان دهید که $e^x=e^a[1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots]$

حل در واقع کافی است بسط سری e^x حول نقطه $x_0=a$ را بنویسیم و می‌دانیم این سری به شکل زیر است.
$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots f^{(n)}(x)=e^x\Rightarrow f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=e^a$$
$$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(x-a)^n=e^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

در مسأله‌های ۹ ـ ۱۱، برای تابع مفروض، فرمول تیلر (رابطهٔ ۷ الف) را به ازای $n=2$ و $a=0$ بنویسید.

۹. $\frac{1}{1+x}$

حل
$$f(x)=(1+x)^{-1}\Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=-1(x+1)^{-2}\Rightarrow f'(0)=-1$$
$$f''(x)=2(x+1)^{-3}\Rightarrow f''(0)=2$$
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^n+R_n(x)\Rightarrow\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+R_2(x)$$

۱۰. $\operatorname{Ln}(1+x)$

حل
$$f(x)=\operatorname{Ln}(1+x)\Rightarrow f(0)=\operatorname{Ln}1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-1(1+x)^{-2}\Rightarrow f''(0)=-1\Rightarrow \operatorname{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+R_2(x)$$

۱۱. $\sqrt{1+x}$

حل
$$f(x)=\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+x\right)^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$
$$f''(x)=\frac{-1}{4}\left(1+x\right)^{\frac{-3}{2}}\Rightarrow f''(0)=\frac{-1}{4}\Rightarrow f(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4(2)}+R_2(x)$$

۱۲. سری تیلر e^x را در $a=1$ بیابید. سری خود را با نتیجه‌ای که در مسألهٔ ۸ به دست آمد مقایسه کنید.

حل با مراجعه به تمرین (۸) داریم
$$e^x=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$$

۱۳. فرض کنید این $f(x)$ و $g(x)$ در $a=0$ دارای مشتقاتی از تمام مراتب اند. نشان دهید که سری مکلورن $f+g$ این است.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)+g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

حل
$$h(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(0)}(0)+g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

۱۴. هر یک از مجموعهای زیر، مقدار یک تابع مقدماتی در یک نقطه است. تابع و نقطه را پیدا کنید.

الف ـ $(0/1)-\frac{(0/1)^3}{3!}+\frac{(0/1)^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^k(0/1)^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$

ب ـ $1-\frac{\pi^2}{4^2\times 2!}+\frac{\pi^4}{4^4\times 4!}-\ldots+\frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k}.(2k)!}+\ldots$

پ ـ $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{(2k)!}+\ldots$

حل الف ـ $\operatorname{Sin}(0/1)$ ب ـ $\operatorname{Cos}(\frac{\pi}{4})$ پ ـ $\operatorname{Cosh}1$

۱۵. هر یک از عبارات زیر را به شکل $u+iv$ که u و v حقیقی باشند بنویسید.

الف ـ $e^{i\pi}$ ب ـ $e^{i\pi/4}$ پ ـ $e^{-i\pi/2}$ ت ـ $e^{i\pi}e^{-i\pi/2}$

حل a) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+0i$

b) $e^{\frac{i\pi}{4}}=\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $e^{\frac{-i\pi}{2}}=\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2})=0-i$

d) $e^{i\pi}.e^{\frac{-i\pi}{2}}=e^{\frac{i\pi}{2}}=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})=0+i$

۱۶. با استفاده از (۱۳) نشان دهید که

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \quad , \quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

این اتحادها را گاهی اتحادهای اویلر می‌نامند

حل $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}{2}$

$=\frac{\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta}{2}=\frac{2\cos\theta}{2}=\cos\theta$

$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2!}=\frac{-2i\sin\theta}{2!}=\sin\theta$

۱۷. با به کارگیری نتایج مسأله ۱۶ نشان دهیدکه

$$\sin^3\theta=\frac{-1}{4}\sin3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta \text{ و } \cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

حل $\cos^3\theta=(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^3=\frac{1}{8}[e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}$

$e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}]=\frac{1}{8}[e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3\theta}]$

$=\frac{1}{8}[\cos3\theta+i\sin3\theta+3(\cos\theta+i\sin\theta)+3(\cos\theta-i\sin\theta)$

$+\cos3\theta-3\sin3\theta]=\frac{1}{8}[2\cos3\theta+6\cos\theta]=\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$

$\sin^3\theta=(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^3=\frac{1}{8i^3}(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta})$

$=\frac{-1}{8i}[\cos3\theta+i\sin3\theta-3(\cos\theta+i\sin\theta)+3(\cos\theta-i\sin\theta)-$

$(\cos3\theta-i\sin3\theta)]=\frac{-1}{8i}(2i\sin3\theta-6i\sin\theta)=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin3\theta$

۱۸. وقتی a و b حقیقی‌اند، $e^{(a+ib)x}$ را به صورت $e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این تعریف نشان که

$$\frac{d}{dx}e^{(a+b)x}=(a+ib)e^{(a+b)x}$$

حل $\frac{d}{dx}e^{(a+ib)x}=\frac{d}{dx}[e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)]$

$=ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+e^{ax}(-b\sin bx+ib\cos bx)$

$=ae^{ax}(\cos bx+i\sin xbx)+ibe^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$

$=ae^{ax}e^{ibx}+ibe^{ax}e^{ibx}=(a+ib)e^{(a+ib)x}$

۱۹. دو عدد مختلط با $a+ib$ و $c+id$ با هم برابرند اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$ با استفاده از این مطلب، انتگرالهای $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ و $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ را از $\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+c$ محاسبه کنید که در آن $c=c_1+ic_2$ یک ثابت مختلط انتگرالگیری است.

حل $\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{1}{(a+ib)}\int(a+ib)e^{(a+ib)x}dx$

$=\frac{1}{(a+ib)}e^{(a+ib)x}+c=\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+c$

$=\frac{a}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}-\frac{ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+c$

$=\frac{ae^{ax}}{a^2+b^2}[\cos(bx)+i\sin(bx)]-\frac{ibe^{ax}}{a^2+b^2}[\cos(bx)+i\sin(bx)]$

$=\frac{ae^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx)+b\sin(bx)]+\frac{ie^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$

$=\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx=\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$+i\int e^{ax}\sin bx\,dx, \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$

$=\int e^{ax}\cos bx\,dx \Rightarrow \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$

$=\int e^{ax}\sin bx\,dx$

۴.۱۲ نقطه‌های بسط، قضیهٔ دو جمله‌ای، آرکتانژانتها، و π

Expansion Points, the Binomial Theorem, Arctangents, and π

در مسأله‌های ۱ـ۶، به کمک سری مناسبی، کمیت نشان داده شده را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید. در هر مورد، نشان دهید که جملهٔ باقیمانده از 5×10^{-4} تجاوز نمی‌کند.

۱. $\cos31^\circ$

حل $31^\circ=31(\frac{\pi}{180})\cong0/5411(\text{rad})\Rightarrow\cos(31^\circ)$

$=\cos(0/5411/\text{rad})=1-\frac{(0/5411)^2}{2}+\frac{(0/5411)^4}{4!}\cong0/857$

$|R|\le\frac{(0/5411)^6}{6!}<3/5\times10^{-5}$

۲. $\tan46^\circ$

حل $46^\circ=46(\frac{\pi}{180})\cong0/8028(\text{rad})\Rightarrow\sin(0/8028)=0/8028$

$-\frac{(0/8028)^3}{3!}+\frac{(0/8028)^5}{5!}\cong0/7194\Rightarrow|R|\le\frac{(0/8028)^7}{7!}<4\times10^{-5}$

$\cos(0/8028)=1-\frac{(0/8028)^2}{2!}+\frac{(0/8028)^4}{4!}-\frac{(0/8028)^6}{6!}\cong0/6946$

$|R| \le \frac{(0/8028)^8}{8!} < 4\times10^{-4}$ و $\tan(0/8028)=\frac{\sin(0/8028)}{\cos(0/8028)}$

$\cong \frac{0/7194}{0/6946} \cong 1/036$

۳. $\sin 6/3$

حل $\sin 6/3 \cong \sin(2\pi+0/0168)=\sin(0/0168)$

$, (\sin x \cong x = 0/0168) \Rightarrow |R| < \frac{(0/0168)^3}{3!} < 7/91\times10^{-7}$

۴. $\ln 1/25$

حل $\ln(1+x) \cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

$\Rightarrow \ln(1+0/25)=0/25-\frac{(0/25)^2}{2}+\frac{(0/25)^3}{3}-\frac{(0/25)^4}{4} \cong 0/223$

$|R| \le \frac{(0/25)^5}{5} < 2\times10^{-4}$

۵. $\tan^{-1}1/02$

حل $x+\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}(1/02) \Rightarrow 1/02=\tan(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan x+1}{1-\tan x}$

$\Rightarrow 1/02=\frac{1+\tan x}{1-\tan x} \Rightarrow \tan x \cong 0/009 \Rightarrow \tan^{-1}(x) \cong x-\frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow \tan^{-1}(0/0099)=(0/0099)-\frac{(0/0099)^3}{3}, \ |R| \le \frac{(0/0099)^5}{5}$

۶. سری مکلورن $\ln(1+2x)$ را بیابید. این سری به ازای چه مقدارهایی از x همگراست؟

حل $\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\dots+\frac{(2x)^n}{n}+\dots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}$

برای همگرایی باید $-1<2x\le1$ یا $\frac{-1}{2}<x\le\frac{1}{2}$

در مسأله‌های ۹ و ۱۰، انتگرالها را به کمک سریها تا سه رقم اعشاری محاسبه کنید.

۷. $\int_0^{0/1}\frac{\sin x}{x}dx$

حل $\int_0^{0/1}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{0/1}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\right)dx$

$=\int_0^{0/1}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)dx=x-\frac{x^3}{3(3!)}+\frac{x^5}{5(5!)}-\dots\Big]_0^{0/1}\simeq 0/100=$

۸. $\int_0^{0/1}e^{-x^2}dx$

حل $\int_0^{0/1}e^{-x^2}dx=\int_0^{0/1}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots\right)dx$

$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^5}{10}-\dots\Big]_0^{0/1}\simeq 0/100$

۹. الف ـ در سری $\ln(1+x)$ به جای x قرار دهید x- تا سری $\ln(1-x)$ به دست آید. این سری را با سری $\ln(1+x)$ ترکیب کنید و نشان دهید که به ازای $\ln\frac{1+x}{2}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots), \ |x|<1$

ب ـ به ازای چه مقداری از x داریم $(1+x)/(1-x)=2$؟

این مقدار x را در سری قسمت (الف) به کار برید و $\ln 2$ را تا سه رقم اعشار برآورد کنید.

حل $\ln(\frac{1+x}{1-x})=\ln(1+x)-\ln(1-x)=[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots]$

$-[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots]=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots)$

$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

بازه همگرایی $-1<x\le1$ است

b) $\frac{1+x}{1-x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$\ln 2=2[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{5}(\frac{1}{3})^5]\cong 0/6931$

۱۰. مجموع سری زیر را بیابید.

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^4+\dots$

حل $\ln(1+\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\ln(1+\frac{1}{2})=\ln\frac{3}{2}$

۱۱. چند جمله از سری مربوط به $\tan^{-1}1$ را باید به هم بیفزاییم تا بتوان بر اساس قضیهٔ برآورد سری متناوب $\pi/4$ را تا دو رقم اعشاری به دست آورد؟

حل $\frac{1}{2n-1}<0/01 \Rightarrow 2n-1>100 \Rightarrow 2n>101 \Rightarrow n>50$

۵.۱۲ همگرایی، سریهای توانی: مشتقگیری، انتگرالگیری، ضرب و تقسیم

Covergence of power Series: Differentiation, Integration, Multiplication, and Division

در مسأله‌های ۱ـ۲۰، بازهٔ همگرایی مطلق را بیابید. اگر این بازه متناهی است، معلوم کنید که سری در هر نقطه انتهایی همگراست یا نه.

۱. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|<1$

پس بازه $-1<x<1$ همگراست و سری در $x=\pm1$ واگراست.

۲. $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{n+1}}{n^2x^n}\right|=|x|<1$

پس سری در بازه $-1<x<1$ همگراست و در $x=\pm1$ واگراست.

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{nx^n}\right|=\frac{|x|}{2}<1$

پس به ازای $|x|<2$ سری همگراست و در $x\pm2$ سری واگراست.

۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(2x)^{2n}}\right|$

$= |2x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$ همگراست $x\in R$ پس سری به ازای

۵. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right|$

$= x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow -\infty < x < \infty$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x-1)^n}{n}} = |x-1| < 1$

$\Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$, if $x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ همگراست

واگراست if $x=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n = \sum\frac{1}{n}$

پس بازه همگرایی $0 < x \le 2$ است.

۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x+2)^n$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}(x+2)^n} = \frac{|x+2|}{2} < 1$

$\Rightarrow |x+2| < 2 \Rightarrow -4 < x < 0$, if $x=0 \Rightarrow \sum a_n = \sum n^2$ واگراست

واگراست if $x=-4 \Rightarrow \sum a_n = \sum -n^2$

و بازه همگرایی $-4 < x < 0$ خواهد بود.

۸. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right|$

$= x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$

این سری به ازای $x=\pm 1$ واگراست پس بازه همگرایی $|x|<1$ خواهدبود

۹. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

حل در اینجا رفتار سری دقیقاً مانند تمرین قبل است با این تفاوت که در $x=\pm 1$ هم همگراست.

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x-2)^n}{n^2}} =$

$= |x-2| < 1 \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$

این سری به ازای $x=1,3$ هم همگراست پس بازه همگرایی $1 \le x \le 3$ خواهد بود.

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

حل $\frac{|\cos nx|}{2^n} \le \frac{1}{2^n} \Rightarrow -\infty < x < \infty$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^5}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n x^n}{n^5}} = 2|x|$

$\Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$

به ازای $x=\pm 1$ سری همگراست پس بازهٔ همگرایی $\frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ خواهد بود.

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n e^n}{n+1}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n e^n}{n+1}} = e|x| \Rightarrow e|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{e}$

واگراست if $x=\frac{1}{e} \Rightarrow \sum a_n = \sum\frac{1}{n+1}$

همگراست if $x=\frac{-1}{e} \Rightarrow \sum a_n = \sum\frac{(-1)^n}{n+1}$

پس بازه همگرایی $\frac{-1}{e} \le x \le \frac{1}{e}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x)^n}{n^n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\cos x)^n}{n^n}} = \cos x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

پس بازه همگرایی $-\infty < x < \infty$ است

۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty}n^n x^n$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n x^n} = x\lim_{n\to\infty}n = \infty$

پس سری مورد نظر فقط در $x=0$ همگراست

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+6)^n}{n!}$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x+6)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(3x+6)^n}\right|$$
$$= |3x+6| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

پس سری به ازای هر $x\in R$ همگراست.

۱۷. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n(n+1)(x-1)^n$$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|(-2)^n\right|(n+1)(x-1)^n} = 2|x-1|$$
$$\Rightarrow 2|x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

سری در $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ واگراست.

۱۸. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n\times 2^n}$$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n.2^n}\right|} = \frac{|x-2|}{2} < 1$$
$$\Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

$$\begin{cases} \text{if } x=0 \Rightarrow \sum a_n = \sum\frac{(-1)^{n+1}}{n} & \text{همگراست} \\ \text{if } x=4 \Rightarrow \sum a_n = \sum\frac{-1}{n} & \text{واگراست} \end{cases}$$

پس سری به ازای $0 \le x < 4$ همگراست.

۱۹. $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n} = \frac{|x^2-1|}{2} < 1$$
$$\Rightarrow |x^2-1| < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{3}$$

سری در $x=\pm\sqrt{3}$ واگراست

۲۰. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n-1}}{n}$$

حل
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x+3)^{n-1}}{n}} = |x+3| < 1 \Rightarrow -4 < x < -2$$

$$\begin{cases} \text{if } x=-2 \Rightarrow \sum a_n = \sum\frac{1}{n} & \text{واگراست} \\ \text{if } x=-4 \Rightarrow \sum a_n = \sum\frac{(-1)^{n-1}}{n} & \text{همگراست} \end{cases}$$

و لذا بازه همگرایی $-4 < x \le -2$ است.

۲۱. مجموع سری مذکور در مسألهٔ ۱۶ را بیابید.

حل
$$e^{u(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u(x))^n}{n!}$$
$$\text{if } u(x)=3x+6 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+6)^n}{n!} = e^{3x+6}$$

۲۲. در بازه‌ای که سری مسأله ۱۹ همگراست، مجموع سری چیست؟

حل
$$a=1, r=\frac{x^2-1}{2} \Rightarrow S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{x^2-1}{2}}=\frac{2}{3-x^2}$$

۲۳. به کمک سریها تحقیق کنید که

الف ـ $\frac{d}{dx}(\text{Cos}x) = -\text{Sin}x$

ب ـ $\int_0^x \text{Cos}t\,dt = \text{Sin}x$

پ ـ $y=e^x$ یک جواب معادله $y'=y$ است.

حل
$$\text{Cos}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \frac{d}{dx}\text{Cos}x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\text{Sin}x$$

b)
$$\int_0^x \text{Cos}t\,dt = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^x t^{2n}dt$$
$$= t - \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{2!} + \frac{t}{5}\cdot\frac{t^5}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n)!}\Big]_0^x$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{Sin}x$$

$$y=e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{de^x}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$

۲۴. سری مکلورن $1/(1+x)^2$ را از روی سری $-1/(1+x)$ بیابید.

حل
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^3} \Rightarrow \frac{-1}{1+x} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Rightarrow$$
$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{1+x} = \frac{d}{dx}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

۲۵. به کمک سری مکلورن $1/(1-x^2)$ یک سری برای $2x/(1-x^2)^2$ بیابید.

حل
$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x^2}\right), \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \Rightarrow$$
$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^{2n+1}$$

۲۶. به کمک اتحاد $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$ یک سری برای $\sin^2 x$ پیدا کنید. سپس، با مشتقگیری از این سری یک سری برای $2\sin x\cos x$ به دست آورید. تحقیق کنید که این، سری مربوط به $\sin 2x$ است.

حل

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$2\sin x\cos x=\frac{d}{dx}\sin^2 x=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2)(2n)(-1)^n\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin 2x$$

۶.۱۲ صورتهای مبهم

Indeterminate Forms

حدهای مذکور در مسائل ۱ـ۲۰ را به کمک سریها محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sinh}{h}$

حل

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\dots}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1-\frac{h^2}{3!}+\frac{h^4}{5!}-\dots\right)=1$$

۲. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots-1-x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\dots\right)=\frac{1}{2}$$

۳. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t-\frac{1}{2}t^2}{t^4}$

حل

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t-\frac{1}{2}t^2}{t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\dots\right)-\frac{t^2}{2}}{t^4}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots}{t^4}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-1}{4!}+\frac{t^2}{6!}-\dots\right)=\frac{-1}{24}$$

۴. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

حل تمرین ۱

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}=1$$

۵. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cosh x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cosh x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{-1}{2!}-\frac{x^2}{4!}-\dots}=-2!=2$$

۶. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sinh)/h-\cosh}{h^2}$

حل

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sinh}{h}-\cosh}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left\{\frac{h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\dots}{h}-\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\dots\right)\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left\{1-\frac{h^2}{3!}+\frac{h^4}{5!}-\dots-1+\frac{h^2}{2!}-\frac{h^4}{4!}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left\{\frac{1}{3}h^2+\frac{h^4}{5!}+\dots-\frac{h^4}{4!}\right\}=\frac{1}{3}$$

۷. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}=0$$

۸. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots-1}=1$$

۹. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin(z^2)-\sinh(z^2)}{z^6}$

حل

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z^2)-\sinh(z^2)}{z^6}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^6}\left\{z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\dots-z^2-\frac{z^6}{3!}-\frac{z^{10}}{5!}\right\}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^6}\left\{\frac{-1}{3}z^6-\frac{z^{10}}{6!}-\dots\right\}=\frac{-1}{3}$$

۱۰. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t-\cosh t}{t^2}$

حل

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cosh t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left\{\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\dots\right)-\left(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\dots\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left\{-t^2-\frac{2t^6}{6!}-\dots\right\}=-1$$

۱۱. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}-x+\frac{x^3}{3!}}{x^5}$$

۱۲. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)-2x}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\dots}{\frac{x^3}{6}-\dots}=\frac{6}{3}=2$$

۱۳. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\right)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\dots}{x^3}=\frac{1}{3}$$

۱۴. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3\cos x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{2}+\frac{2}{15}x^5+\dots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)}{x^3\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{8}+\dots}{x^3-\frac{x^5}{2}+\dots}=\frac{1}{2}$$

۱۵. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{-1/x^2}-1\right)$

حل

$$\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{-1}{e^{x^2}}-1\right)=\lim_{n\to 0}x^2\left[\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^4}-\frac{1}{3!x^6}+\dots\right)-1\right]$$

$$=\lim_{n\to 0}\left[-1+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^4}+\dots\right]=-1$$

۱۶. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}=\lim\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\dots}{1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\dots}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+\dots}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\dots}=2$$

۱۷. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)+\frac{(3x)^3}{3}+\dots}{x}=3$$

۱۸. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2}{x-1}$

حل

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left[(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\dots\right]}{x-1}=2$$

۱۹. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$

حل

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{e^x}=0$$

۲۰. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2-2\cos x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

حل

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2-2\cos x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2-2+2\cos x}{2x^2(1-\cos x)}\right]$$

$$\lim\frac{x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)}{2x^2\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}-\frac{2x^6}{6!}+\dots}{x^4-\frac{x^6}{12}+\dots}=\frac{1}{12}$$

۲۱. الف ـ ثابت کنید که وقتی $x\to+\infty$ $\int_0^x e^{t^2}dt\to+\infty$

ب ـ مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to\infty}x\int_0^x e^{t^2-x^2}dt$

حل

$$a)\ x\geq 0\Rightarrow e^{x^2}\geq 1\Rightarrow\int_0^x e^{t^2}dt\geq\int_0^x dt=x$$

$$\Rightarrow \text{if } x\to\infty\Rightarrow\int_0^x e^{t^2}dt>\infty\Rightarrow\int_0^x e^{t^2}dt\to\infty$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}x\int_0^x e^{t^2-x^2}dt=\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt=\lim_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$$

حال از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

دوباره از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}(1+x^2)}{2e^{x^2}(1+2x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$$

توجه کنید

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt=e^{x^2}$$

۲۲. مقادیر r و s را چنان بیابید که

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{-3}\sin 3x+rx^{-2}+s\right)=0$$

حل

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{-3}\sin 3x+rx^{-2}+s\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{r}{x^2}+s\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3x)-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\dots}{x^3}+\frac{r}{x^2}+s\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}-\frac{9}{2}+\frac{81x^2}{40}+\dots\frac{r}{x^2}+s\right]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-9}{2}+s=0 \\ 3+r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=\frac{9}{2} \\ r=-3 \end{cases}$$

مسأله‌های گوناگون

MISCELLANEOUS PROBLEMS

۱. الف ـ سری مکلورن تابع $x^2/(1+x)$ را بیابید

ب ـ آیا سری وقتی $x=2$ همگراست؟ (دلیل مختصری بیاورید)

حل $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Rightarrow \frac{x^2}{1+x}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}$

خیر سری به ازای $|x|<1$ همگراست.

۲. بسط به $\mathrm{Sin}^{-1}x$ به سری مکلورن را با انتگرالگیری از سری مربوط به $(1-t^2)^{-1/2}$ از ۰ تا x دست آورید. بازه‌های همگرایی این سریها را بیابید.

حل $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k+\ldots$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,\ |x|<1$$

که‌درآن $\binom{m}{1}=m,\ \binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!},\ k\geq 1\Rightarrow\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ و if $x=-t^2$ & $m=\frac{-1}{2}\Rightarrow$

$$(1-t^2)^{\frac{-1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{-1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k t^{2k}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}^{-1}x=\int_0^x (1-t^2)^{\frac{-1}{2}}dt$$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k\right)}{k!}(-1)^k t^{2k}dt\right.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.2.,3\ldots(2n-1)}{2^n\,n!(2n+1)}x^{2n+1},\ |t|<1$$

۳. با قرار دادن سری مربوط به $y=\mathrm{Sin}x$ در سری مربوط به e^y، چهار جملهٔ اول سری مکلورن مربوط به $e^{\mathrm{Sin}x}$ را به دست آورید.

حل $e^y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!},\ y=\mathrm{Sin}x\Rightarrow e^{\mathrm{Sin}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sin}x)^n}{n!}$

$$\simeq 1+\frac{\mathrm{Sin}x}{1}+\frac{(\mathrm{Sin}x)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{Sin}x)^3}{3!}=1+\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]^2+\frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]^3$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}$$

۴. با فرض $|x|>1$، بسطهای زیر

$$\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots,\quad x>1$$

$$\tan^{-1}x=\frac{-\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots,\quad x<-1$$

را با انتگرالگیری از سری زیر از $x(>1)$ تا $+\infty$ یا از $-\infty$ تا $(x<-1)$ به دست آورید. $\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1+(1/t^2)}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^8}+\ldots$

حل a) $x>1,\ \int_x^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{b\to\infty}\int_x^b\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{b\to\infty}\tan^{-1}t\Big]_x^b$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}b-\tan^{-1}x\right]=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\quad(*)$$

$$\int_x^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\int_x^b\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^6}-\ldots\right)dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{t}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{5t^5}+\ldots\right]_x^b=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\ldots\quad(**)$$

$$(*)=(**)\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}-\ldots$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots,\quad x>1$$

b) $x<-1\Rightarrow\int_{-\infty}^x\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^x\frac{dt}{1+t^2}=\lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_a^x$

$$=\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}\ (*),\quad\int_{-\infty}^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_{-\infty}^x\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^6}-\ldots\right)dt$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{-1}{t}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{5t^5}+\ldots\right]_a^x=\frac{-1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots\ (**)$$

$$(*)=(**)\Rightarrow\tan^{-1}x=\frac{-\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots$$

۵. الف ـ با قرار دادن سری مربوط به $y=1-\mathrm{Cos}x$ در سری مربوط به $\mathrm{Ln}(1-y)$، سری مکلورن مربوط به $\mathrm{Ln}(\mathrm{Cos}x)$ را تا جمله x^6 به دست آورید.

ب ـ نتیجهٔ قسمت (الف) را به کار برید و $\int_0^{0/1}\mathrm{Ln}(\mathrm{Cos}x)dx$ را تا پنج رقم اعشاری برآورد کنید.

حل $\mathrm{Cos}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow\mathrm{Ln}(1+x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ -1<x\leq 1\Rightarrow\mathrm{Ln}(1-y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-y)^n}{n},\ -1<y\leq 1\Rightarrow\mathrm{Ln}(\mathrm{Cos}x)=\mathrm{Ln}(1-y)$$

$$=\mathrm{Ln}(1-(1-\mathrm{Cos}x))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1+\mathrm{Cos}x)^n}{n}$$

$$=(-1+\cos x)-\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\dots$$

$$\simeq\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{-x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\dots$$

$$\int_0^{0/1}\operatorname{Ln}(\cos x)dx=\int_0^{0/1}\left(\frac{-x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\dots\right)dx$$

$$=\left[\frac{-x^3}{6}-\frac{x^5}{60}-\frac{x^7}{315}\right]_0^{0/1}=-0/0001 7$$

۶. مطلوب است محاسبه $\int_0^1\left[(\sin x)/x\right]dx$ تا سه رقم اعشاری

حل

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}dx$$

$$=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=x-\frac{x^3}{18}-\frac{x^5}{600}-\frac{x^7}{25280}+\dots\Big]_0^1$$

۷. مطلوب است محاسبهٔ $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ تا سه رقم اعشاری

حل

$$=\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_0^1 x^{2n}dx=0/747$$

۸. تابع $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ را بر حسب توانهای $(x-1)$ بسط دهید و سه جملهٔ ناصفر را به دست آورید.

حل کافی است بسط تیلر تابع را حول نقطه $x=1$ بدست آورد

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f(1)=\sqrt{2}$$

$$f'(x)=x\left(1+x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x)=\left(1+x^2\right)^{\frac{-1}{2}}-x^2\left(1+x^2\right)^{\frac{-3}{2}}\Rightarrow f''(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)+\frac{1}{4\sqrt{2}}(x-1)^2+\dots$$

۹. تابع $f(x)=1/(1-x)$ را بر حسب توانهای $(x-2)$ بسط دهید و بازهٔ همگرایی را پیدا کنید.

حل کافی است بسط تیلر تابع حول نقطه $x=2$ را بنویسیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\Rightarrow f(2)=-1$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow f'(2)=1$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\Rightarrow f''(2)=-2$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Rightarrow f^{(n)}(2)=(-1)^{n+1}n!$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{n!}(x-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x-2|^n}=|x-2|<1\Rightarrow 1<x<3$$

توجه کنید

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-1-(x-2)}=\frac{-1}{1+(x-2)}$$

$$=(-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$$

۱۰. $f(x)=1/(x+1)$ را بر حسب توانهای $(x-3)$ بسط دهید.

حل

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{4+(x-3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{4}\right)}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{4}\right)^n$$

۱۱. $\cos x$ را بر حسب توانهای $(x-\pi/3)$ بسط دهید.

حل کافی است بسط تیلر تابع را حول $x=\frac{\pi}{3}$ بدست آورد

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$f(x)=\cos x\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\sin x\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-\cos x\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$$

$$f'''(x)=\sin x\Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos x=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+\frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\dots+\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\dots$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

۱۲. نخستین سه جملهٔ بسط تابع $1/x$ را به سری تیلر حول نقطهٔ π به دست آورید.

حل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n$$

$$f(x)=x^{-1}\Rightarrow f(\pi)=\pi^{-1} \quad \text{و} \quad f'(x)=-x^{-2}\Rightarrow f'(\pi)=-\pi^{-2}$$

$$f''(x)=2x^{-3}\Rightarrow f''(\pi)=2\pi^{-3} \quad \text{و} \quad f'''(x)=-3!x^{-4}\Rightarrow f'''(\pi)=-3!\pi^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-n-1}\Rightarrow f^{(n)}(\pi)=(-1)^n n!\pi^{-n-1}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\pi^{-n-1}}{n!}(x-\pi)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi)^n}{\pi^{n+1}}$$

۱۳. فرض کنید f و g توابعی باشند که در شرطهای زیر صدق می‌کنند: (الف) $f(0)=1$، (ب) $f'(x)=g(x)$، (پ) $g'(x)=f(x)$، $g(0)=0$. مطلوب است برآورد $f(1)$ تا سه رقم اعشاری

حل

$$\begin{cases} f'(x)=g(x)\Rightarrow f''(x)=g'(x) \\ g'(x)=f(x)\Rightarrow g''(x)=f'(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(x)=g'(x)=f''(x) \\ f(x)=g(x)\Rightarrow f'''(x) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f^{(2n)}(x)=f(x) \\ f^{(2n+1)}(x)=g(x) \end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(0)}{n!}x!=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots\simeq f(0)+g(0)x+\frac{f(0)}{2!}x^2+\frac{g(0)}{3!}x^3$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\Rightarrow f(1)=1/543$$

۱۴. فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ثابت کنید که

الف ـ اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، آنگاه $a_1=a_3=a_5=\ldots=0$؛

ب ـ اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد، آنگاه $a_0=a_2=a_4=\ldots=0$.

حل می‌دانیم $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$؛ اگر f تابعی فرد باشد، f' تابعی زوج است و می‌دانیم اگر f تابعی فرد باشد، $f(0)=0$ است. پس با توجه به نکات فوق مشخص می‌گردد که $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ حال اگر f تابعی زوج باشد، $f^{(2n+1)}(0)$ همگی صفر هستند و چون $a_{2n+1}=\frac{f^{(2n+1)}(0)}{n!}\Rightarrow a_1=a_3=a_5=\ldots=0$ و اگر f تابعی فرد باشد، $f^{(2n)}(0)$ همگی تابعی فرد هستند پس صفر هستند. یا اینکه $a_{2n}=\frac{f^{(2n)}(0)}{n!}=0$

۱۵. چهار جمله اول سری مکلورن $f(x)=e^{(e^x)}$ را (تا جمله x^3) بیابید.

حل

۱۶. عبارت زیر را به کمک سری محاسبه کنید. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)-\sin x}{1-\cos^2 x}$

حل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)-\sin x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)x^n}{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{1-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}{1-\left(1-x^2-\frac{x^3}{3}-\ldots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}}{x-\frac{x^3}{3}-\ldots}\right)=\infty$$

۱۷. مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to 0}\left[(\sin x)/x\right]^{1/x^2}$

حل

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\Rightarrow \ln y=\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln y$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{0}{0} \quad \text{(مبهم)}$$

حال از هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0$$

توجه کنید.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4\sin x+2x\cos x}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cos x-2x\sin x+2\cos x}=\frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\ln y=-\frac{1}{6}\Rightarrow \ln y=\frac{-1}{6}\Rightarrow y=e^{-\frac{1}{6}}$$

۱۸. فرض کنید که $\sum a_n$ یک سری همگرا متشکل از اعداد مثبت است. آیا $\sum\ln(1+a_n)$ همگراست؟ توضیح دهید.

حل بله چرا که $\ln(1+a_n)\le a_n$

$\sum a_n$ یک سری همگراست پس بنا بر آزمون مقایسه $\sum\ln(1+a_n)$ هم همگراست

در مسأله‌های ۱۹ـ۲۶، بازهٔ همگرایی هر سری را بیابید. اگر این بازهٔ متناهی است، همگرایی را در نقاط انتهایی بیازمایید.

۱۹. $1+\frac{x+2}{3\times 1}+\frac{(x+2)^2}{3^2\times 2}+\dots+\frac{(x+2)^n}{3^n\times n}+\dots$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(x+2)^n}{3^n.n}}=\frac{|x+2|}{3}<1$

$\Rightarrow |x+2|<3\Rightarrow -5<x<1$

if $x=1\Rightarrow \sum a_n=\sum\frac{1}{n}$ (واگراست)

if $x=-5\Rightarrow \sum a_n=\sum\frac{(-1)^n}{n}$ (همگراست)

پس بازه همگرایی $-5\le x<1$ خواهد بود.

۲۰. $1+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\dots+\frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}.\frac{(2n-2)!}{(x-1)^{2n-2}}\right|$

$=(x-1)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}=0<1$

پس بازه همگرایی R است. (R مجموعه اعداد حقیقی است)

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^n}}$

$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1\Rightarrow -\infty<x<\infty$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!x^n}\right|$

$=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{|x|}{e}<1\Rightarrow |x|<e$

۲۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\frac{(x-3)^n}{2^n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(x-3)^n}{(2n+1).2^n}}=\frac{|x-3|}{2}<1\Rightarrow 1<x<5$

if $x=1\Rightarrow \sum a_n=\sum(-1)^n\frac{n+1}{2n+1}$ (واگراست)

if $x=5\Rightarrow \sum a_n=\sum\frac{n+1}{2n+1}$ (واگراست)

توجه کنید در دو سری در نقطه $x=1,5$ حد جمله عمومی ناصفر است پس واگرا هستند بنابراین بازه همگرایی $1<x<5$ است

۲۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\frac{(x-2)^n}{3^n}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|x-2|}{3}<1\Rightarrow -1<x<5$

در نقطه‌های $x=-1,5$ سری واگراست چراکه حد جمله عمومی سری ناصفر است

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n^2}$

حل $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\sqrt[n]{\frac{(x-1)^n}{n^2}}=|x-1|<1\Rightarrow 0<x<2$

در نقطه‌های $x=0,2$ سری به یک P سری با $p=2>1$ تبدیل می‌شود که بازه همگرایی $0\le x\le 2$ خواهد شد.

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

حل $\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}=|x|<1\Rightarrow -1<x<1$

if $x=1\Rightarrow \sum a_n=\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ (واگراست)

if $x=-1\Rightarrow \sum a_n=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (همگراست)

پس بازه همگرایی $-1\le x<1$ است.

در هر یک از مسأله‌های ۲۷ ـ ۲۹، همه مقادیر xی را که سری به ازای آنها همگراست بیابید.

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{3n}}{n!}$

حل $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{3n+3}}{(n+1)!}.\frac{n!}{(x-2)^{3n}}\right|$

$=|x-2|^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ که به ازای هر x همگراست.

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(\sin x)^n}{n^2}$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n(\sin x)^n}{n^2}}=2|\sin x|\le 1$

$\Rightarrow |\sin x|\le\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le\sin x\le\frac{1}{2}$

توجه کنید سری فوق به ازای $\sin x=\frac{\pm 1}{2}$ به یک P سری با $P=2>1$ تبدیل می‌شود.

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$

حل $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n}=\left|\frac{x-1}{x}\right|<1$

$\Rightarrow -1<\frac{x-1}{x}<1$ و I) $\frac{x-1}{x}<1\Rightarrow x>0$

I) $-1<\frac{x-1}{x}\Rightarrow x<0$ or $x>\frac{1}{2}$

پس بازه همگرایی اشتراک $x>\frac{1}{2}$ است توجه کنید به ازای $x=\frac{1}{2}$ داریم $\sum a_n=\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ که یک سری همگراست پس بازه همگرایی کلی $x\geq\frac{1}{2}$ است.

۳۰. تابعی به وسیله سری توانی زیر تعریف می‌شود.

$$y=1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6+\dots+\frac{1\times4\times7\times\dots\times(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}+\dots$$

الف ـ بازهٔ همگرایی سری را بیابید.

ب ـ نشان دهید تابعی که به وسیله این سری تعریف می‌شود در یک معادله را دیفرانسیل به شکل $y''=x^ay+b$ صدق می‌کند، و ثابتهای a و b بیابید.

حل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{1.4.8\dots(3n+1)x^{3n+3}}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{1.4\dots(3n-2)x^{3n}}\right|$$

$$n=x^3\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0$$

پس سری به ازای هر x همگراست

ب) $a=1$ و $b=0$

۳۱. اگر $a_n>0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/(1+a_n)$ همگراست.

حل

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}$$

$$=\frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}a_n}=\frac{1}{1+0}=1$$

توجه کنید چون $\sum a_n$ همگراست پس $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (شرط لازم برای همگرایی). و چون نسبت دو سری یک عدد متناهی شده است پس بنابر آزمون نسبت و این که $\sum a_n$ همگراست. نتیجه می‌شود $\sum\frac{a_n}{1+a_n}$ هم همگراست.

۳۲. اگر $1>a_n>0$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}Ln(1-a_n)$ همگراست. (راهنمایی: نخست نشان دهید که $(|Ln(1-a_n)|\leq a_n/(1-a_n)$

حل

$$0<a_n<1\Rightarrow|Ln(1-a_n)|=-Ln(1-a_n)=a_n+\frac{a_n^2}{2}+\frac{a_n^3}{3}+\dots$$

$$\leq a_n+a_n^2+a_n^3+\dots=\frac{a_n}{1-a_n}(r=a_n,\ a=a_n)\ |\leq|Ln(1-a_n)|\frac{a_n}{1-a_n}$$

اما ثابت شد اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، $\sum\frac{a_n}{1-a_n}$ هم همگراست و چون $\sum\frac{a_n}{1-a_n}$ همگراست بنا بر آزمون مقایسه $Ln(1-a_n)$ هم همگراست.

قومی متفکرند اندر ره دین
قومی به گمان فتاده در راه یقین
می‌ترسم از آنکه بانگ آید روزی
کی بیخبران راه نه آنست و نه این

«حکیم عمر خیام»

الهی عاقبت محمود گردان

جدول مختصر انتگرالها

۱. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

۲. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq ۱, \quad a > ۰$

۳. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

۴. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

۵. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+۱}}{a(n+۱)} + C, \quad n \neq -۱$

۶. $\int (ax+b)^{-۱}\,dx = \frac{۱}{a}\ln|ax+b| + C$

۷. $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+۱}}{a^۲}\left[\frac{ax+b}{n+۲} - \frac{b}{n+۱}\right] + C, \quad n \neq -۱, -۲$

۸. $\int x(ax+b)^{-۱}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^۲}\ln|ax+b| + C$

۹. $\int x(ax+b)^{-۲}\,dx = \frac{۱}{a^۲}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$

۱۰. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{۱}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C$

۱۱. $\int (\sqrt{ax+b})^n\,dx = \frac{۲}{a}\,\frac{(\sqrt{ax+b})^{n+۲}}{n+۲} + C, \quad n \neq -۲$

۱۲. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = ۲\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

۱۳. الف) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{۲}{\sqrt{-b}}\tan^{-۱}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < ۰$

ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{۱}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C, \quad b > ۰$

۱۴. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^۲}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{۲}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

۱۵. $\int \frac{dx}{x^۲\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{۲b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

۱۶. $\int \frac{dx}{a^۲+x^۲} = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a} + C$

۱۷. $\int \frac{dx}{(a^۲+x^۲)^۲} = \frac{x}{۲a^۲(a^۲+x^۲)} + \frac{۱}{۲a^۳}\tan^{-۱}\frac{x}{a} + C$

۱۸. $\int \frac{dx}{a^۲-x^۲} = \frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

کمرنگترین جوهر بهتر از قویترین حافظه است

به مناسبت سال ۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات

دوره سه جلدی
شابک : ۴-۰۲-۵۷۹۴-۹۶۴-۹۷۸
ISBN: 978-964-5794-02-4

جلد اول(۲)
شابک : ۹-۰۷-۵۷۹۴-۹۶۴-۹۷۸
ISBN: 978-964-5794-07-9